

Sia $f(x, y)$ funzione di 2 variabili, definita in un aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Def 34.1.1 Sia v un vettore di norma 1. Si dice che f ammette derivata direzionale, nella direzione v , nel punto $x_0 \in \Omega$ se esiste

$$(B4.1.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

e si indica $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$

v si dice **VERSORE**, $v \in \mathbb{S}^1 \leftarrow$ cerchio di raggio 1

Per capire Def 34.1.1, si fissa x_0 fissato, v fissato, e si considera la restrizione di f alla retta $\subset \mathbb{R}^2$ passante per x_0 e avente direzione v : sia essa φ

$$\varphi(t) = f(x_0 + tv) \quad \text{con } t \in \text{intorno di } 0 \text{ in } \mathbb{R} \text{ in modo che } x_0 + tv \in \Omega$$

φ è una funzione di 1 variabile,
definita in un intorno di $t=0$.

Cosa vuol dire che φ è derivabile in 0?

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h) - \varphi(0)}{h} \in \mathbb{R} \quad (34.2.1)$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\parallel} \\ \varphi'(0)$$

Ma $\varphi(h) = f(x_0 + hv)$ per def. di φ ,

$$\text{e } \varphi(0) = f(x_0)$$

Dunque sostituendo in (34.2.1), ho

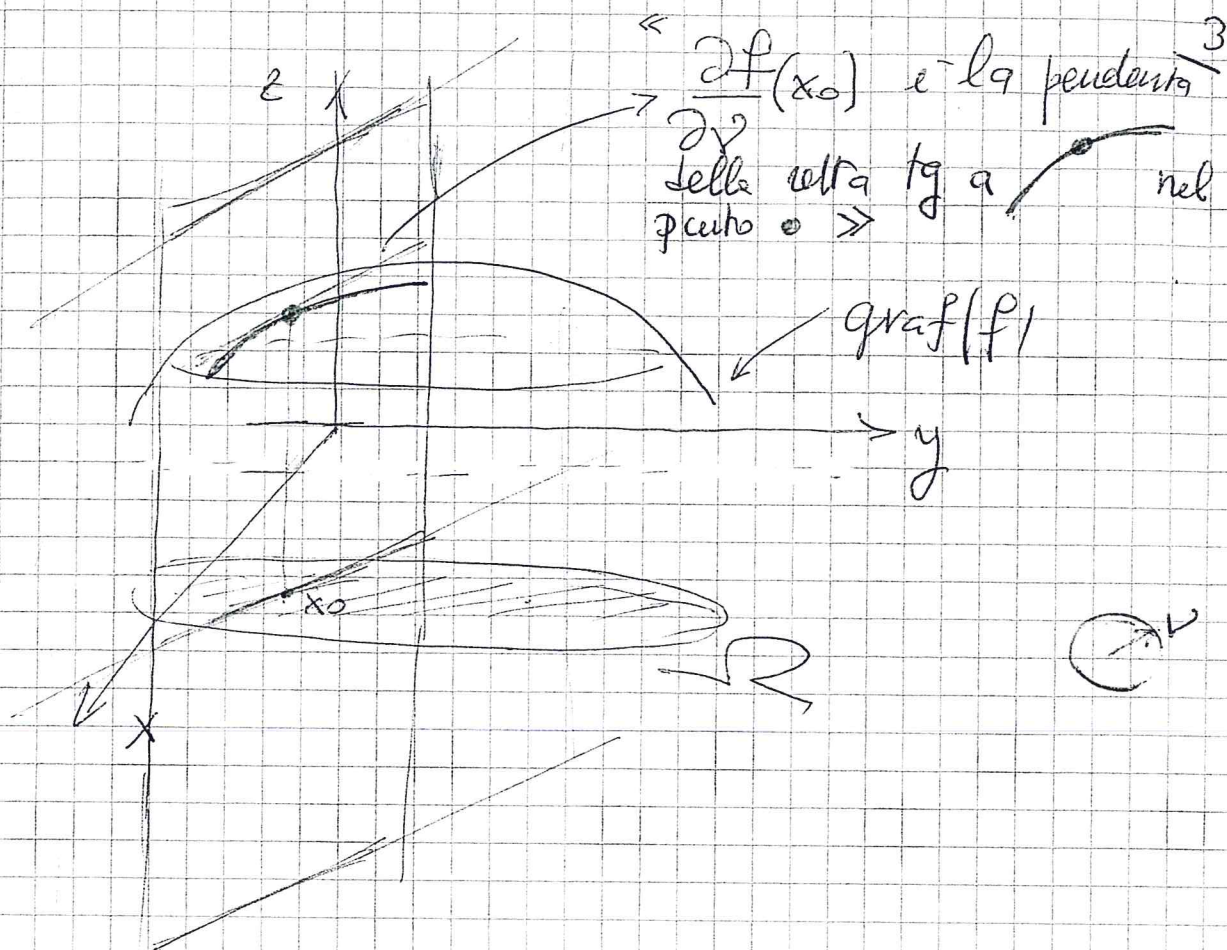
$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hv) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

che è la (34.1.1).

Dunque f ha derivata nella direzione

v in x_0 quando dec. essere

derivabile la restrizione di f alla retta
passante in x_0 e avente direzione v



Nella lezione 33 abbiamo visto il caso particolare $v = e_1 = (1, 0)$

$$v = e_2 = (0, 1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial e_1}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \quad \text{derivata parziale di } f \text{ rispetto a } x \text{ nel punto } x_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial e_2}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0) \quad \text{derivata parziale di } f \text{ rispetto a } y \text{ nel punto } x_0$$

? Dato $v \in \mathbb{R}^1$, come si calcola $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$?
Ieri (lezione 33) abbiamo visto come

4

Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ nel caso $v = e_1$ oppure
 $v = e_2$.

In generale vale:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle \quad (34.4.1)$$

Esercizio 34.4.1 Sia $f(x, y) = \sin x$
 $+ \sin y + \cos(x+y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$. Calcolare la derivata
di f nella direzione v nel punto $(\pi/2, 0)$.

Usiamo la (34.4.1), con la scelta

$$\underline{x}_0 = (\pi/2, 0) \in \Omega = \mathbb{R}^2.$$

Devo calcolare $\nabla f(\underline{x}_0)$. Abbiamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos x - \sin(x+y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos y - \sin(x+y)$$

$$\nabla f(x, y) = (\cos x - \sin(x+y), \cos y - \sin(x+y))$$

$$\nabla f(\pi/2, 0) = (-1, 0)$$

Dalla (34.4.1) segue

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}\left(\pi/2, 0\right) &= \left\langle (-1, 0), \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Def 34.5.1 Si dice che f è differenziabile in x_0 se esiste un vettore $v \in \mathbb{R}^2$ tale che

$$\lim_{K \rightarrow (0,0)} \frac{f(x_0 + K) - f(x_0) - \langle v, K \rangle}{|K|} = 0$$

Nota 34.5.1 In una variabile essere derivabile in $x_0 \Leftrightarrow$ essere differenziabile in x_0 .

In due variabili non è più vero. Attenzione.

La generalizzazione ^(a 2 variabili) del ^{concetto di} derivabilità in 1 variabile è la differenziabilità: essa è legata all'esistenza del piano tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$

6

Def 34.6.1 Sia $\lambda \in \mathbb{R}$. Si definisce

il livello λ di f come

$$\{(x, y) \in \Omega : f(x, y) = \lambda\} =: \{f = \lambda\}$$

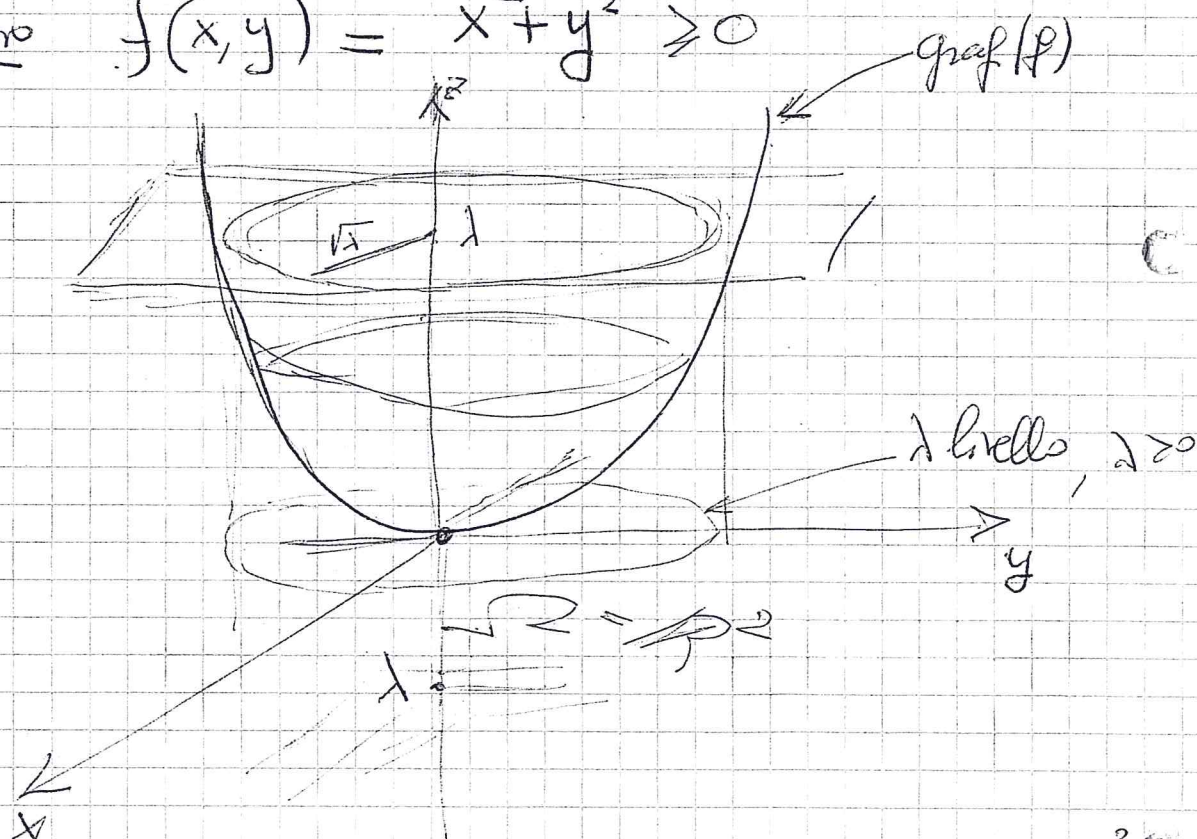
Si definisce il λ -sottolivello

$$\{(x, y) \in \Omega : f(x, y) < \lambda\} =: \{f < \lambda\}$$

Si definisce il λ -sopralivello

$$\{(x, y) \in \Omega : f(x, y) > \lambda\} =: \{f > \lambda\}$$

Esempio $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$



$$\begin{aligned} \lambda < 0 &\Rightarrow \{f = \lambda\} = \emptyset, \{f < \lambda\} = \emptyset, \{f > \lambda\} = \mathbb{R}^2 \\ \lambda = 0 &\Rightarrow \{f = \lambda\} = \{0, 0\}, \{f < \lambda\} = \emptyset, \{f > \lambda\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\} \end{aligned}$$

$\lambda > 0 \Rightarrow \{f = \lambda\} = \text{cerchio di centro } 0 \text{ e raggio } \sqrt{\lambda}$

$\lambda > 0 \Rightarrow \{f < \lambda\} = \text{regione interna (aperta) al cerchio di raggio } \sqrt{\lambda}$

$\lambda > 0 \Rightarrow \{f > \lambda\} = \text{regione esterna (aperta) al cerchio di raggio } \sqrt{\lambda}$

Si può dimostrare che $k(x, y) \in \{f = \lambda\}$

$$\nabla f(x, y) \perp \{f = \lambda\} \quad (\text{ortogonalit\`a in } \Omega)$$

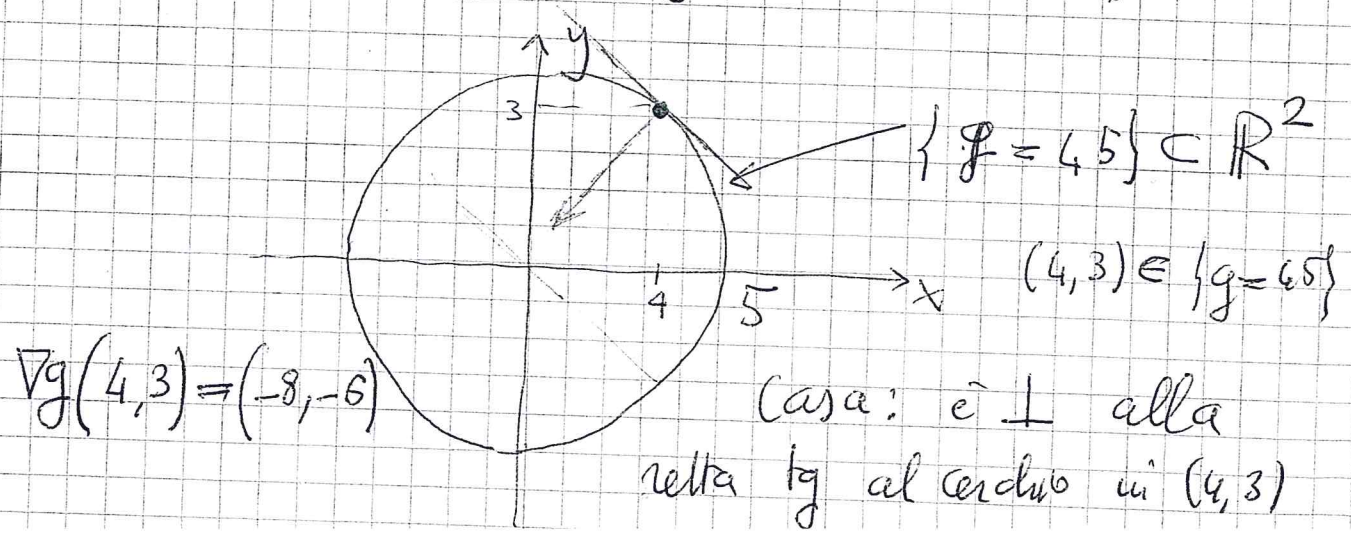
e punta dove $\{f > \lambda\}$.

Vediamo se questo \`e verificato

nel caso di $g(x, y) = -(x^2 + y^2) + 70$

$$\nabla g(x, y) = (-2x, -2y)$$

$$\lambda = 45 \quad \{g = 45\} = \{x^2 + y^2 = 25\}$$



In analisi 1 abbiamo visto:

« x_0 punto stazionario ($f'(x_0) = 0$), $x_0 \in I$ aperto
 $f''(x_0) > 0$ (34.8.1)

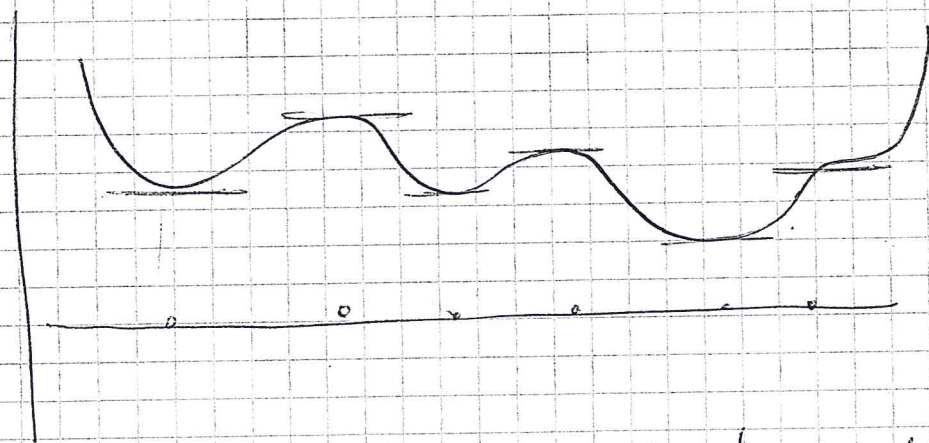
$\Rightarrow x_0$ minimo locale stretto di f »

Def 34.8.1 $x_0 \in \Omega$ ^{aperto} si dice stazionario

(o critico) se $\nabla f(x_0) = 0$,

$$\text{cioè} \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) = 0 \end{cases}$$

$$(x = (x_1, x_2) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,)$$



« La stazionarietà vuol dire piano tangente
al grafico di f in $(x_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^3$
orizzontale »

Cosa diventa adesso in 2 variabili
la (34.8.1)?

Def 34.9.1. Si dice matrice Hessiana
di f in x_0 la matrice

$$\nabla^2 f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) \end{pmatrix}$$

Esempio $f(x, y) = x \cos(x+y)$
 $x_0 = (\pi/2, 0)$

$$\nabla f(x, y) = (\cos(x+y) - x \sin(x+y), -x \sin(x+y))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -2 \sin(x+y) - x \cos(x+y) \xrightarrow{\uparrow \text{in } (\pi/2, 0)} -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -x \cos(x+y) \xrightarrow{\text{in } (\pi/2, 0)} 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -\sin(x+y) - x \sin(x+y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

$$\xrightarrow{\uparrow \text{in } (\pi/2, 0)} -1 \quad \Rightarrow \nabla^2 f(\pi/2, 0) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

10

Mostare che $\nabla^2 f(x)$ è simmetrica
(è un teorema), La (34.8.1)

diventa

$$\nabla^2 f(x_0) > 0$$

matrice simmetrica definita positiva,
cioè i suoi autovalori (che sono
reali) sono positivi.

Teo 34.10.1 Se x_0 è stazionario,
cioè $\nabla f(x_0) = 0$, e se

$$\nabla^2 f(x_0) > 0$$

allora x_0 è minimo locale
stretto di f .

Questo generalizza parte di quanto
visto in una variabile.