

$$\int_0^{\pi/8} \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(2x))^2} dx$$

Come applicare la formula del cambio di variabile negli integrali: (teo 29.9.1),

che diceva

$$\ll t = \varphi(s)$$

$$dt = \varphi'(s) ds \gg$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \underbrace{f(\varphi(s))}_{\varphi(\alpha)} \varphi'(s) ds = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt \quad (33.1.1)$$

scelgo:

$$f(z) = \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(2z))^2} \Rightarrow \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(2t))^2} dt$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{2} \arctg(s)$$

$$f(\varphi(s)) = \frac{1}{1 + \left(\operatorname{tg} 2 \cdot \frac{1}{2} \arctg(s)\right)^2} = \frac{1}{1 + s^2}$$

$$\varphi'(s) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + s^2}$$

$\Rightarrow$
(33.1.2)

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{(1 + s^2)^2} ds$$

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Dalla (33.1.1), (33.1.2) segue

$$(33.2.1) \quad \int_0^{\pi/8} \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(2t))^2} dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{(1+s^2)^2} ds$$

dove $\varphi(\alpha) = 0, \quad \varphi(\beta) = \pi/8$

$$\Downarrow \\ \alpha = 0$$

$$\frac{1}{2} \arctg(\beta) = \pi/8$$

$$\Downarrow$$

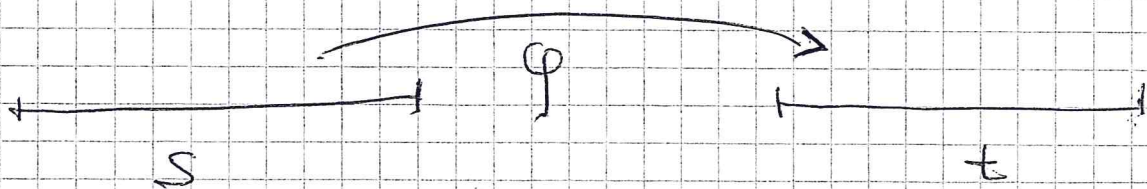
$$\beta = 1$$

$\Rightarrow$ Dalla (33.2.1) si ha

$$\int_0^{\pi/8} \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(2t))^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{(1+s^2)^2} ds$$

Morale: dobbiamo calcolare $\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt$

e t va pensata come variabile «in arrivo»



L'integrale in t viene trasformato
in un integrale nella variabile θ ,
chiamata "in partenza"

Nota 33.3.1 $\int f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$

dove f quoziente di polinomi

Cambio di variabile suggerito:

$$\cos \theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin \theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad (33.3.1)$$

Si trasforma in un integrale
razionale nella variabile t ,

Controllarlo per cosa.

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + (\tan(2\theta))^2} &= \frac{1}{1 + (\tan(2\theta))^2} = (\cos(2\theta))^2 \\ &= ((\cos \theta)^2 - (\sin \theta)^2)^2 = (1 - 2(\sin \theta)^2)^2 \end{aligned}$$

$$f(x, y) = (x^2 - y^2)^2, \text{ o anche}$$

$$\hat{f}(x, y) = (1 - 2x^2)^2$$

$$\ll \cos \theta \, d\theta = \left(\frac{2}{1+t^2} - \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \right) dt = \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2} dt \quad \frac{4}{2}$$

$$\int (\cos(2\theta))^2 d\theta = \int \left(1 - 2 \left(\frac{2t}{1+t^2} \right)^2 \right)^2$$

$$\frac{2(1+t^2)}{1-t^2} \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)^2} dt$$

$$= 2 \int \left(\frac{1+t^4-6t^2}{(1+t^2)^2} \right)^2 \frac{1}{(1+t^2)} dt$$

ES 33.4.1 (Formula di Taylor con
resto integrale).

Sia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$. Allora

$\forall x \in I$ si ha

$$\begin{aligned} (33.4.1) \quad f(x) &= \text{Pol}_{\text{Taylor}}(f, x, x_0, n) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \\ &= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n}_{\text{Pol}_{\text{Taylor}}(f, x, x_0, n)} + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt \end{aligned}$$

Dim. per induzione su n .

5

$$n=0 \quad f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt$$

che è vera (seconda formula pag 5 lezione

29, è teo. fond. del calcolo integrale)

“ Dunque la (33.4.1) generalizza teo.

fond. calcolo integrale, così come

la formula di Taylor col resto di

Laprange generalizzano il teo. di

Laprange »

Per cosa il resto del ragionamento

induttivo: cioè dimostrare che se

vale la (33.4.1) allora vale

la (33.4.1) con $n+1$ al posto di n ($f \in \mathcal{C}^{n+2}(I)$)
[pag 323, G. Modì, Analisi Reale]

ES (corsa) 33.5.1 Abbiamo fatto

$$\int \frac{1}{(1+x^2)} dx, \quad \int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \quad (\text{pag 7, 8 lezione})$$

32

Trovare una formula ricorsiva
per il calcolo di

$$I_n := \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx, \quad n \geq 2$$

$$I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)} \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}}$$

[pag. 325, G. Prodi, Analisi Matematica]

Esempio:

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2} dx$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P(x) = 1, \quad Q(x) = (x^3-1)^2$$

Radici di Q : $r_1 = 1$, molteplicità $2 = m_1$

$$(x^3-1) = (x-1)(x^2+x+1) \quad (33.6.1)$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{molteplicità } 2 = \mu_1$$

$$\bar{z}_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{molteplicità } 2$$

Usciamo ko 28.11.1

$$\frac{1}{(-1+x^3)^2} = \frac{a_{11}}{(x-1)} + \frac{a_{12}}{(x-1)^2} + \frac{b_{11}x + c_{11}}{x^2+x+1} + \frac{b_{12}x + c_{12}}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2}$$

$$m_1 = 2 \Rightarrow a_{1m_1} = a_{12}$$

$$x^2+x+1 = (x-z_1)(x-\bar{z}_1) \text{ per casa}$$

Dobbiamo trovare A, B, C, D, E, F : tenendo conto di (33.6.1), ho

$$\begin{aligned} 1 &= A(x-1)(x^2+x+1)^2 \\ &\quad + B(x^2+x+1)^2 \\ &\quad + (Cx+D)(x-1)^3(x^2+x+1) \\ &\quad + (Ex+F)(x-1)^2 \\ &= x^5(A+C) \\ &\quad + x^4(-A+2A+B+D-2C+E) \\ &\quad + x^3(A-2A+2A+2B+C+D-2C+C-2D+E) \\ &\quad + x^2(\\ &\quad + x(\\ &\quad + 1(-A+B+D+F) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ A+B+D-C=0 \\ A+2B-D+E=0 \\ \dots = 0 \\ \dots = 0 \\ -A+B+D+F=1 \end{cases}$$

$\Rightarrow A, B, C, D, E, F$ uniche.

Una volta trovate A, B, C, D, E, F :

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2} dx = A \ln|x-1| - \frac{B}{(x-1)} +$$

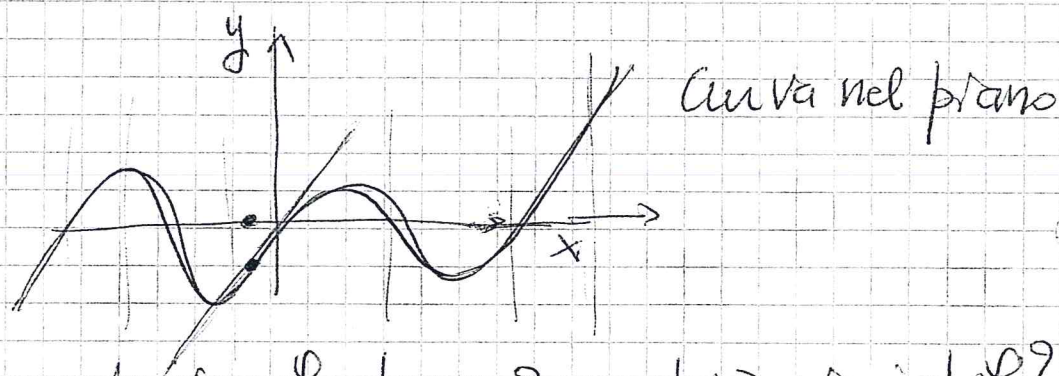
$$+ \int \frac{Cx+D}{x^2+x+1} dx + \int \frac{Ex+F}{(x^2+x+1)^2} dx$$

sono integrali che si danno fare, con pazienza sufficiente.

Qualcosa sulle funzioni di due variabili.

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{graf}(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \} \subset \mathbb{R}^2$$

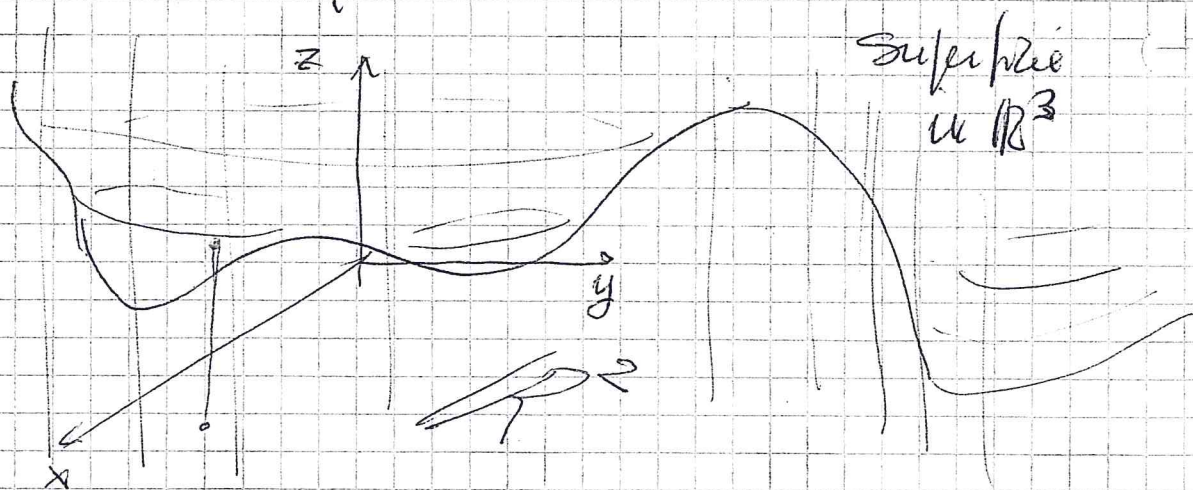


Cosa succede se f ha 2 o più variabili?

Facciamo solo il caso di 2 variabili:

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{graf}(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 : y = f(x) \} \subset \mathbb{R}^3$$



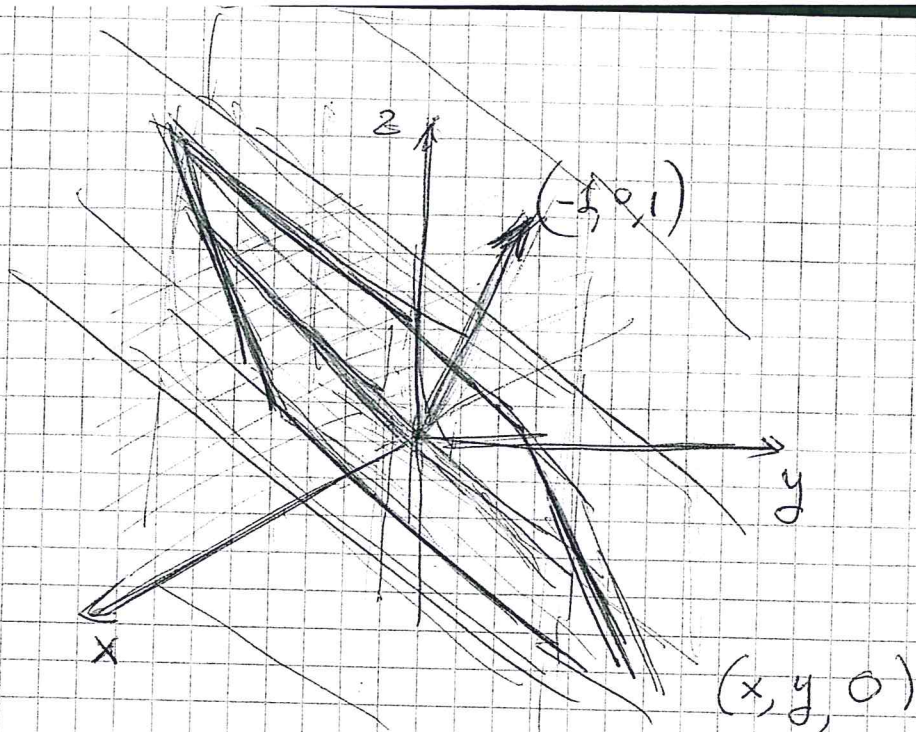
ES.

$$f_1(x, y) = x,$$

$$f_2(x, y) = x + y,$$

$$f_3(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

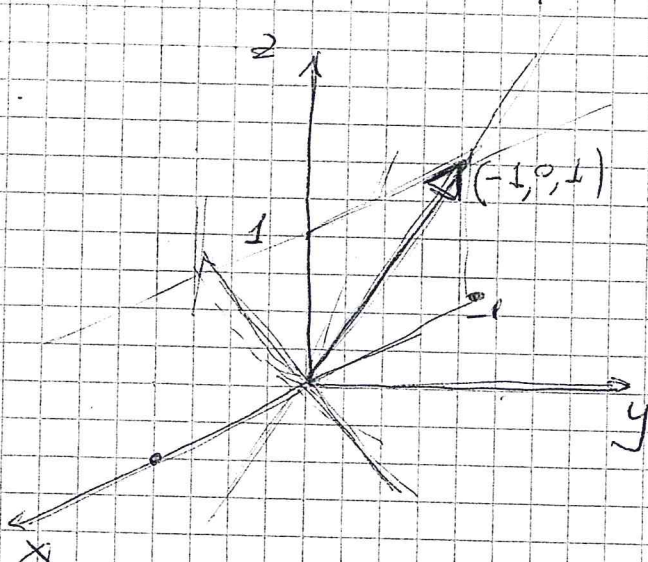
$$f_4(x, y) = x^2 + y^2$$



$$\text{graf}(f_1) = \{ (x, y, z) : z = f_1(x, y) \}$$

$$= \{ (x, y, z) : z = x \}$$

$(-1, 0, 1)$ è $\perp$ al piano



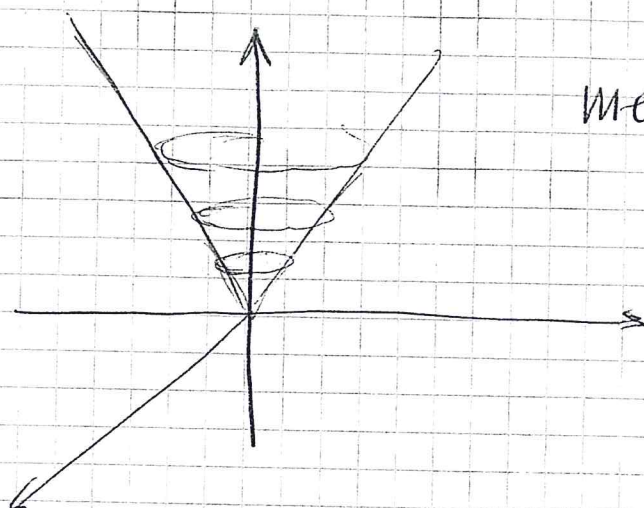
$\{ (-t, 0, t) : t \in \mathbb{R} \}$ retta passante per $(-1, 0, 1)$
 $(1, 0, 1)$; $(0, 1, 0)$ generano il piano

$$\text{graf}(f_2) = \{ (x, y, x+y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \};$$

$(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$ generano il piano

$$\{ z = x + y \}$$

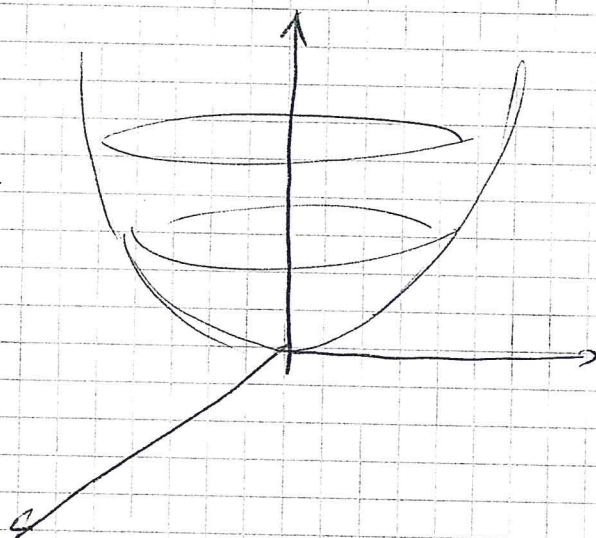
$$\text{graf}(f_3) = \left\{ z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}$$



mezzo cono

generalizzazione di valore assoluti

$$\text{graf}(f_4) = \left\{ z = x^2 + y^2 \right\}$$



paraboloid.

Def 33.11.1 Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ regione del piano, $x_0 \in \Omega$. Sia $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.
 Si dice che f è continua in x_0
 se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: $\forall x \in \Omega, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
 " $\delta(x_0, \varepsilon)$

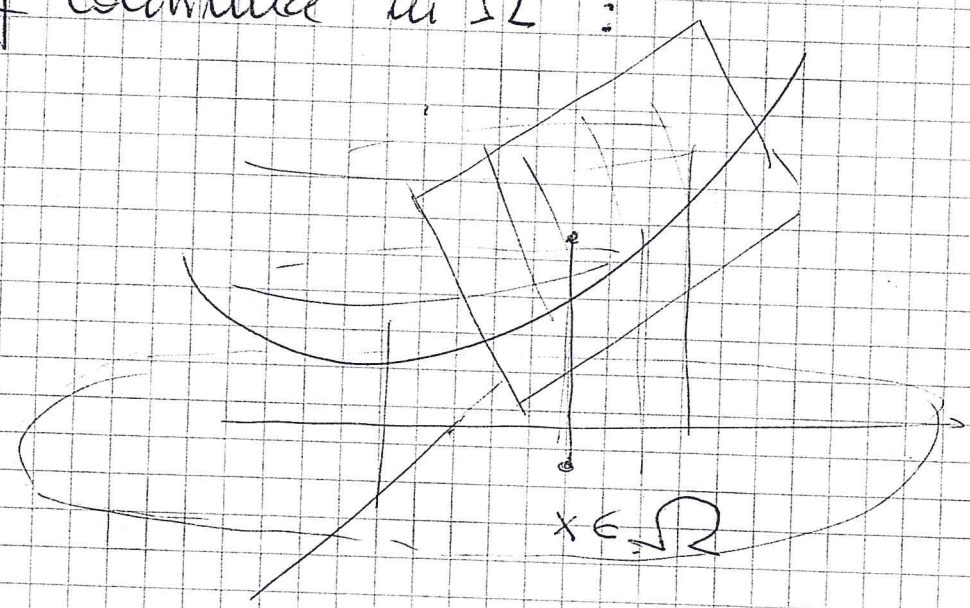
Attenzione: stessa def. che in 1
variabile, con la differenza che
ora $x \in \mathbb{R}^2$ e $|x - x_0|$ indica

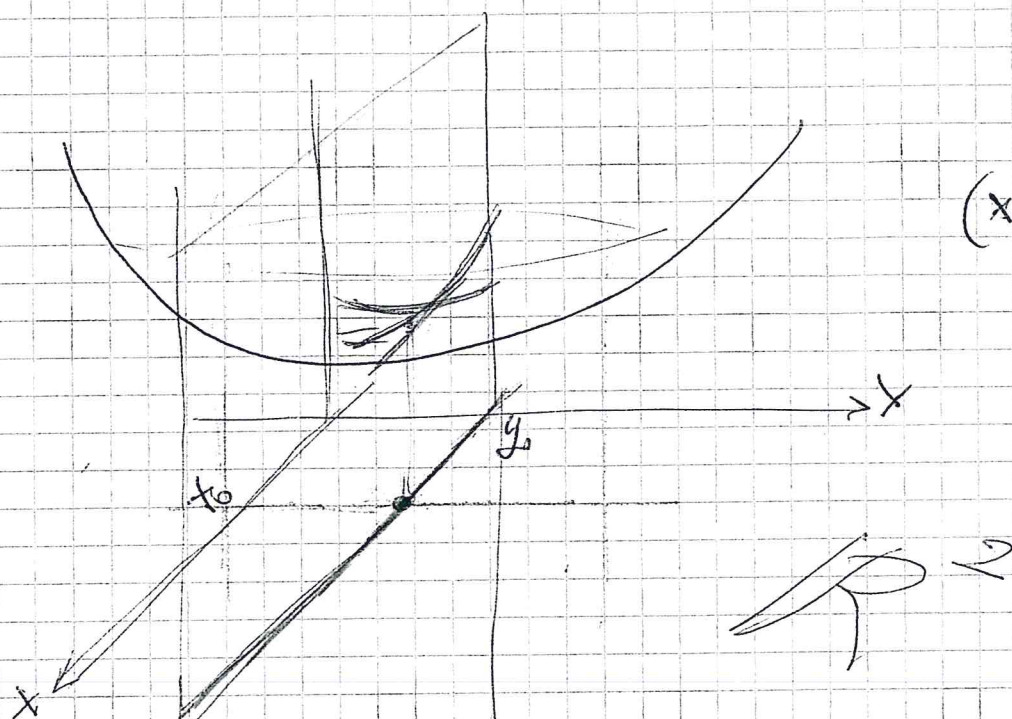
la norma di $x - x_0 \in \mathbb{R}^2$, cioè $x = (x_1, x_2)$
 $x_0 = (x_{01}, x_{02})$

$$\sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2} = |x - x_0|$$

Si dice che f è continua in Ω
se f è continua in tutti i punti
di Ω .

Supponiamo ora Ω aperto di $\mathbb{R}^2$,
 f continua in Ω :





Le derivate parziali di f si definiscono come:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Esempio $f(x, y) = x \arctan y + \ln(1 + x^2 y^2)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \arctan y + \frac{1}{1 + x^2 y^2} 2xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{1 + y^2} + \frac{1}{1 + x^2 y^2} 2x^2 y$$

Def Si definisce gradiente di f in (x, y) e si indica con $\nabla f(x, y)$, il vettore $(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$