

Lezione 32

13/12/18

9-11

Vediamo il caso $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Come usualmente
riprendere la formula

$$f' + (\lambda_1 - \lambda_2)f = 0 \quad (32.1.1)$$

trovata a pag 10 lezione 31. Si ha ora
 $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Ma (32.1.1) è del

1° ordine, lineare, omogenea, a coeff
costanti

$$f' = (\lambda_2 - \lambda_1)f$$

$\Downarrow$

$$f(x) = C e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} = v'(x)$$

$$\Rightarrow v(x) = \int C e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} dx$$

$$= \frac{C}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + K$$

$$\Rightarrow u(x) = e^{\lambda_1 x} \left(\frac{C}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + K \right) \quad (32.1.2)$$

Nota Se al posto di λ ,

dalla (31.5.3) in poi, avessimo
meno λ_2 (invece di λ_1 come abbiamo
fatto fino qui) avrei trovato lo
stesso risultato finale.

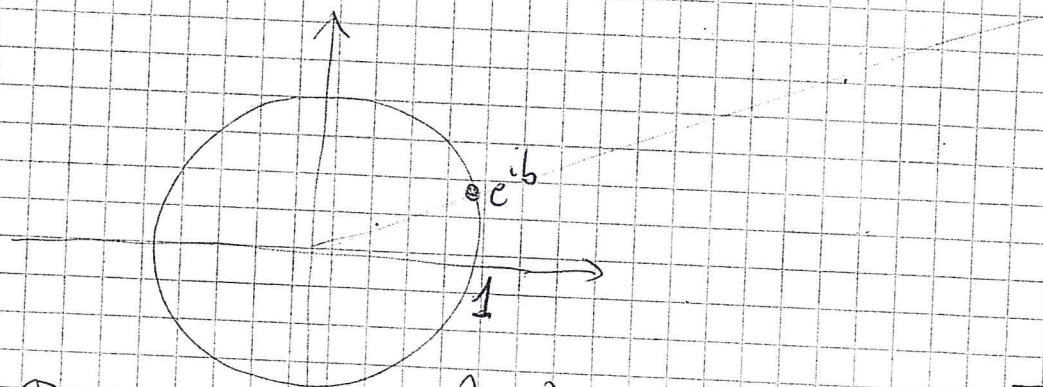
Dalla (31.2.1) ho

$$u(x) = \frac{c}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 x} + k e^{\lambda_1 x} \quad (32.21)$$

se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, allora con $c, k \in \mathbb{R}$ ho tutte le soluzioni.

Nota Se $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$

$$\begin{aligned} e^z &= e^{a+ib} = e^a e^{ib} \\ &= e^a (\cos b + i \sin b) \end{aligned}$$



Siano ora

« $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$

La (32.2.1) è una scrittura complessa,
 $c, k \in \mathbb{C}$

3
Scrivere in modo equivalente (che avrebbe
dimostrato) la (32.2.1) in forma

reale, in modo che $u(x) \in \mathbb{R}$,
bisogna "giocare" sulla libertà che
abbiamo di scegliere $c, k \in \mathbb{C}$;

Inoltre se $c \in \mathbb{C}$ è generica,
dato che d_1, d_2 ($d_1 \neq d_2$) sono
finiti, anche $\frac{c}{d_2 - d_1} \in \mathbb{C}$ è

generica. Ne segue che (32.2.1) è
equivalente a

$$u(x) = p e^{d_1 x} + q e^{d_2 x},$$

al variare di $p, q \in \mathbb{C}$

Adesso, $d_1 = a_1 + i b_1$, $d_2 = a_2 + i b_2 \Rightarrow$

$$u(x) = p e^{a_1 x} e^{i b_1 x} + q e^{a_2 x} e^{i b_2 x} =$$

dato che $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$, allora $a_1 = a_2$, $b_1 = -b_2$

$$= e^{a_1 x} (p e^{i b_1 x} + q e^{-i b_1 x}) \quad (32.4.1)$$

$$\overline{e^z} = \overline{e^a e^{ib}} = e^a (\cos b - i \sin b) = e^{\bar{z}}$$

$$\begin{aligned} \overline{zw} &= \bar{z} \bar{w}; & e^{\bar{z}} &= e^{a-ib} = e^a e^{-ib} \\ & & &= e^a (\cos(-b) + i \sin(-b)) \\ & & &= e^a (\cos b - i \sin b) \end{aligned}$$

Con una scelta $p = q \in \mathbb{R}$

la (32.4.1) diventa

$$u_1(x) = 2p e^{a_1 x} \cos(b_1 x) \in \mathbb{R} \quad (32.4.2)$$

Si può fare un'altra scelta di p, q (per $\cos$)

in modo da ottenere

$$u_2(x) = \varepsilon e^{a_1 x} \sin(b_1 x) \in \mathbb{R} \quad (32.4.3)$$

con $\varepsilon \in \mathbb{R}$

Ma essendo l'equazione lineare, la somma di 2 soluzioni è ancora soluzione. Si deduce che la famiglia

di tutte le sol. V della eq. nella pag. 11
della lezione 31 si scrive come

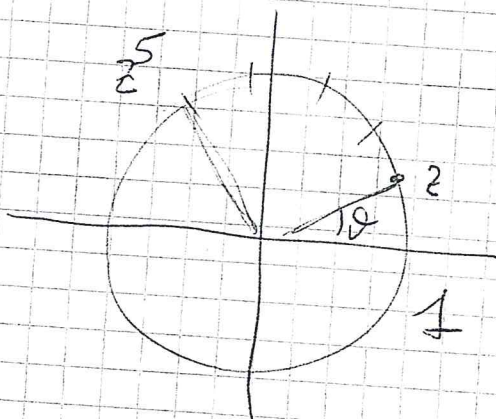
$$y(x) = e^{a_1 x} (\varepsilon \cos(b_1 x) + \delta \sin(b_1 x))$$

al variare di $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$.

Nota

$$z \in \mathbb{C}, |z| = 1$$

$$z = \cos \theta + i \sin \theta$$
$$= e^{i\theta}$$



$$z^5 = ? = (\cos \theta + i \sin \theta)^5$$
$$= e^{i5\theta} = \cos(5\theta) + i \sin(5\theta)$$

Diunque spesso i numeri complessi
si «maneggiano» con più facilità
se scritti nella forma $\rho e^{i\theta}$ e
non nella forma $\rho(\cos \theta + i \sin \theta)$.
Abbiamo dunque dimostrato il:

TCO 32.6.1 Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sia

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta \quad \text{pol. caratteristico.}$$

Supponiamo che P abbia due

radici λ_1, λ_2 con $\lambda_1 \neq \lambda_2$

(se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ si ha $\bar{\lambda}_2 = \lambda_1$)

Allora tutte le soluzioni di

$$u'' + \alpha u' + \beta u = 0$$

si scrivono in forma complessa come

$$u(x) = p e^{\lambda_1 x} + q e^{\lambda_2 x}$$

al variare di $p, q \in \mathbb{C}$,

oppure in forma reale come

$$u(x) = e^{a_1 x} (\varepsilon \cos(b_1 x) + \delta \sin(b_1 x))$$

al variare di $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$,

dove abbiamo scritto $\lambda_1 = a_1 + i b_1$

$$8 \int_0^{\pi/8} \frac{1}{1 + (\operatorname{tg}(2x))^2} dx = I$$

$\operatorname{tg}(2x) = y$ Cambio di variabile

$\ll 2[1 + (\operatorname{tg}(2x))^2] dx = dy \gg$ Come mai questo equivale

$\ll dx = \frac{dy}{2(1 + (\operatorname{tg}(2x))^2)}$ a applicare la (29.9.1)? per con

$= \frac{dy}{2(1 + y^2)} \gg$

$$I = 8 \int_0^1 \frac{1}{2(1 + y^2)^2} dy$$

$$= 4 \int_0^1 \frac{1}{(1 + y^2)^2} dy$$

$$\frac{1}{(1 + y^2)^2} = \frac{1 + y^2 - y^2}{(1 + y^2)^2} = \frac{1}{1 + y^2} - \frac{y^2}{(1 + y^2)^2}$$

$$\Rightarrow I = \underbrace{4 [\operatorname{arctg} y]_0^1}_{\pi} - 4 \int_0^1 \frac{y^2}{(1 + y^2)^2} dy$$

Occupiamoci di

8

$$\int_0^1 \frac{y^2}{(1+y^2)^2} dy$$

$$= \int_0^1 y \frac{y}{(1+y^2)^2} dy = \underline{\underline{\Pi}}$$

Ricordo to 29.6.1: $f(y) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+y^2} \Rightarrow f'(y) = \frac{y}{(1+y^2)^2}$

$$\int_0^1 g f' dy = - \int_0^1 g' f dy + [g f]_0^1$$

Dunque

$$\underline{\underline{\Pi}} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{1+y^4} dy + \left[-\frac{1}{2} \frac{y}{1+y^2} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

Risultato finale:

$$\pi - 4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2} + 1$$