

Lezione 31

12/12/18

10-13

Dati  $a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue, dato  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $u_0 \in \mathbb{R}$ , cerchiamo

 $u$ 

$$\begin{cases} u'(x) + a(x)u(x) = b(x) \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

(31.1.1)

PROBLEMA DI CAUCHY

Idea: Cercare di vedere il membro sinistro della (31.1.1) come una derivata. Lo è

quasi: indichiamo con

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(s) ds \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

moltiplichiamo (31.1.1) per  $e^{A(x)}$ :

$$(31.1.2) \quad e^{A(x)} (u'(x) + a(x)u(x)) = e^{A(x)} b(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Il membro sinistro è diventato una derivata:

$$\left( e^{A(x)} u(x) \right)' = e^{A(x)} (a(x)u(x) + u'(x))$$

$$(31.1.1) \Leftrightarrow (31.1.2) \Leftrightarrow \begin{cases} (e^A u)' = e^A b \\ u(x_0) = u_0 \end{cases}$$

Integro (31.1.2) tra  $x_0$  e  $x$ :

$$\int_{x_0}^x \frac{d}{dt} (e^{A(t)} u(t)) dt = \int_{x_0}^x e^{A(t)} b(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

... quindi, usando la formula pag 5 let. 29,

$$e^{A(x)} u(x) - e^{A(x_0)} u(x_0) = \int_{x_0}^x e^{A(t)} b(t) dt$$

Dunque  $\forall x \in \mathbb{R}$ , dato che  $A(x_0) = 0$ ,  $u(x_0) = u_0$

$$e^{A(x)} u(x) = u_0 + \int_{x_0}^x e^{A(t)} b(t) dt$$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$  la soluzione ha l'espressione:

$$(31.2.1) \quad u(x) = \underbrace{e^{-A(x)} u_0}_{u_{om}} + \underbrace{e^{-A(x)} \int_{x_0}^x e^{A(t)} b(t) dt}_{u_{part}}$$

$$= e^{-A(x)} u_0 + \int_{x_0}^x e^{A(t)-A(x)} b(t) dt.$$

È la funzione cercata.

ES 31.2.1 trovare la funzione  $u$  di

$$\begin{cases} u'(x) + 2x u(x) = 3 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

questo corrisponde alla scelta:

$$a(x) = 2x, \quad b(x) = 3$$

$$x_0 = 0, \quad u_0 = 1$$

Inserendo queste informazioni nella

(31.2.1)

deduco  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$u(x) = e^{-A(x)} + 3e^{-A(x)} \int_0^x e^{A(t)} dt$$

$$A(x) = \int_0^x 2s ds = x^2$$

$$\Rightarrow u(x) = e^{-x^2} + 3e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Controlliamo che sia la soluzione:

$$u(0) = e^0 + 3e^0 \int_0^0 e^{t^2} dt = 1 \quad \text{Si}$$

$$u'(x) = \left( -2x - 6x \int_0^x e^{t^2} dt \right) e^{-x^2} + 3$$

$$u'(x) + 2xu(x) = e^{-x^2} \left( -2x - 6x \int_0^x e^{t^2} dt \right) + 3 + 2x \left( e^{-x^2} + 3e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt \right)$$

$$= 3 \quad \text{Si.}$$

Nota: se l'eq. è omogenea, cioè  $b=0$ , la soluzione è  $u_{om}(x) = e^{-A(x)}$ . Dunque la  $u$  in (31.2.1) è somma di  $u_{om} + u_{part}$ .

Eq. differenziali <sup>(ordinarie)</sup> lineari del 2° ordine  
a coefficienti COSTANTI reali omogenee  
e non omogenee

(l'ordine è "peggiore" ma i coefficienti

Sotto "migliorati") : <sup>siano dati</sup>  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$  non  
tutti nulli

$$(31.4.1) \quad au'' + bu' + cu = d(x) \in \mathbb{R}$$

$\nwarrow \quad \nearrow \quad \nearrow \quad \nwarrow$   
 coefficienti COSTANTI      termine noto assegnato

coefficienti COSTANTI

OSS 31.4.1 Se  $a = 0$  l'eq.

diventa del 1° ordine. Inoltre se

$b = 0$  ho  $cu = d(x)$ , dunque

$u(x) = \frac{1}{c} d(x)$ . Se  $b \neq 0$

$$(31.4.2) \quad u' + \frac{c}{b} u = \frac{1}{b} d(x)$$

è un caso particolare dell'eq.

(31.1.1)<sub>1</sub>; un basta studiare allora:  
 $a \neq 0$

$k \neq 0$  dividendo per (31.4.1)

per  $a$  ottengo

$$u'' + \frac{b}{a} u' + \frac{c}{a} u = \frac{1}{a} d(x) \in \mathbb{R}$$

$$(31.5.1) \quad u'' + \alpha u' + \beta u = f(x) \in \mathbb{R}$$

con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Cominciamo con il caso omogeneo  
cioè supponiamo  $f(x) \equiv 0$ . Dobbiamo  
cercare le soluzioni di

$$(31.5.2) \quad u'' + \alpha u' + \beta u = 0$$

Saranno infinite "a due parametri"  $\Rightarrow$

Per avere un'unica soluzione si  
assegnano  $x_0, u_0, u_1 \in \mathbb{R}$  e  
si impone

$$(31.5.3) \quad \begin{cases} u(x_0) = u_0 \\ u'(x_0) = u_1 \end{cases}$$

Allora (31.5.2) + (31.5.3) ha unica soluzione.

Torniamo alla (31.5.2) da sola:

$$u'' + \alpha u' + \beta u = 0 \quad (31.6.1)$$

Trucco:  $u(x) = e^{\lambda x} v(x)$

Così siamo u come prodotto di un'esponentiale,  $e^{\lambda x}$ , per una  $v$  anch'essa incognita.

$$u'(x) = \lambda e^{\lambda x} v(x) + e^{\lambda x} v'(x)$$

$$u''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} v(x) + 2\lambda e^{\lambda x} v'(x) + e^{\lambda x} v''(x)$$

Sostituendo le espressioni di  $u''$ ,  $u'$ , e  $u$  nella (31.6.1) si ottiene:

$$e^{\lambda x} \left( v'' + v' [2\lambda + \alpha] + v [\lambda^2 + \lambda\alpha + \beta] \right) = 0 \quad (31.6.2)$$

$$(31.6.1) \Leftrightarrow (31.6.2)$$



$$(31.6.3) \quad v'' + (2\lambda + \alpha)v' + (\lambda^2 + \lambda\alpha + \beta)v = 0$$

Se scegliamo  $\lambda = -\alpha/2$  ho

$$v'' + \left(-\frac{\alpha^2}{4} + \beta\right)v = 0$$

da distinguere il segno di  $-\frac{\alpha^2}{4} + \beta \dots$

Nota: l'eq.  $v'' + (2\lambda + \alpha)v' = 0$

si riesce a ridurre a una eq. del 1° ordine + un calcolo di un integrale: infatti, posto  $v' = f$

si ha 
$$f' + (2\lambda + \alpha)f = 0$$

So trovare  $f$  (1ª parte della lezione 31); la integro e trovo  $v$ .

Seguiamo dunque questa strada:

Scegliamo  $\lambda$  in modo che

(31.7.1) 
$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$$

Def 31.8.1 Data l'eq. (31.6.1),  
è dato  $\lambda \in \mathbb{C}$ , il polinomio

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta$$

si chiama polinomio caratteristico  
dell'equazione.

Dal teo fond. dell'algebra, si ha  
che  $P$  ha 2 radici in  $\mathbb{C}$ ,

è dato che  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , se

$$P(z) = 0, \operatorname{im}(z) \neq 0$$

$$\Rightarrow P(\bar{z}) = 0.$$

Supponiamo  $z = x + iy, y \neq 0, P(z) = 0$

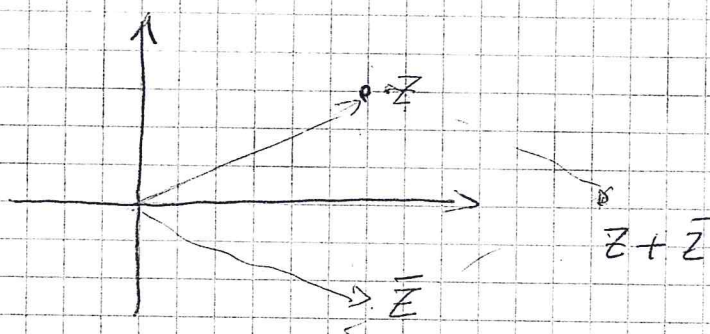
$$(\lambda - z)(\lambda - ?) = P(\lambda)$$

$$\begin{aligned} \text{Se } ? = \bar{z} \text{ ho } (\lambda - z)(\lambda - \bar{z}) &= \\ &= \lambda^2 - (z + \bar{z})\lambda + z\bar{z} \end{aligned}$$

$$z \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$$

$$z \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x \in \mathbb{R}$$



Siano  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$  le due radici di  $P$ .

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) &= P(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta \\ &= \lambda^2 + \lambda(-\lambda_1 - \lambda_2) + \lambda_1 \lambda_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta = \lambda_1 \lambda_2$$

$$\alpha = -(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Metto  $\lambda = \lambda_1$  in (31.6.3), e ho:

$$v'' + (2\lambda_1 + \alpha)v' = 0$$

Posto  $v' = f$  ho

10

$$(31.10.1) \quad f' + (2\lambda_1 + \alpha)f = 0$$

Note  $\alpha = -(\lambda_1 + \lambda_2)$  quindi

(31.10.1) diventa

$$f' + (2\lambda_1 - \lambda_1 - \lambda_2)f = 0$$

Cioè

$$f' + (\lambda_1 - \lambda_2)f = 0$$

Dunque se  $\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow f' = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \text{costante} = c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v'(x) = c \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow v(x) = cx + \delta, \quad \delta \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ma  $u(x) = e^{\lambda_1 x} v(x)$

$$\Rightarrow u(x) = e^{\lambda_1 x} (cx + \delta) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Abbiamo dunque dimostrato IP:

Teo 31.11.1. Siano  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

$$\text{Sia } P(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta.$$

Supponiamo che  $P$  abbia due radici reali coincidenti,  $\lambda_1 = \lambda_2$ .

Allora tutte le funzioni  $u$  di

$$u'' + \alpha u' + \beta u = 0$$

Si scrivono come

$$u(x) = e^{\lambda_1 x} (cx + \delta) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

al variare di  $c, \delta \in \mathbb{R}$ .