

Lezione 30

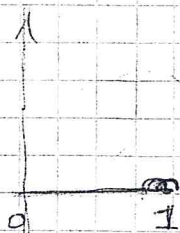
11/12/18

14-17

1

3) $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt$$



$f(0)=0$, f continua in $[0,1]$

$1 \geq x \geq 0 \quad t \in [0,x] \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{t}{1-t}} \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$

$f(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow$ ^{punto di} $\sqrt{\frac{t}{1-t}}$ _{minimo}

assunto di f , con valore minimo $= 0$

$\forall t \in [0,1) \quad \sqrt{\frac{t}{1-t}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-t}}$

(ricordare che $\sqrt{\cdot}$ è crescente)

$\Rightarrow \forall x \in [0,1) \quad f(x) \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$

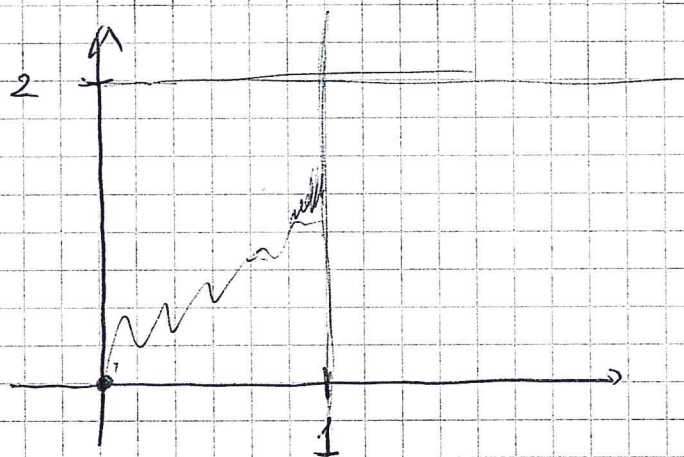
$= \left[-2\sqrt{1-t} \right]_0^x = 2 - 2\sqrt{1-x} \leq 2$ ← perché $x \in [0,1]$

$\frac{d}{dt} \left(-2\sqrt{1-t} \right) = +2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t}} = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$

Nota per definizione perremo

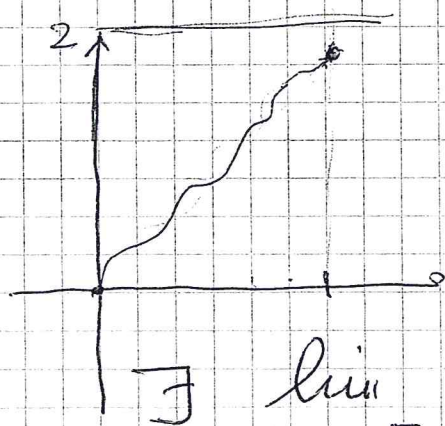
$$\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt = \lim_{x \rightarrow 1^-} \int_0^x \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt$$

(primo esempio di integrale di Riemann in senso improprio)



$f \in C'([0,1))$ dal teo fond. calc. ^(Teo 29.1.1.) $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ integrale, e $f'(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \geq 0$

$\Rightarrow f$ è strett. crescente in $[0,1)$ poiché $f'(x) > 0 \forall x \in (0,1)$



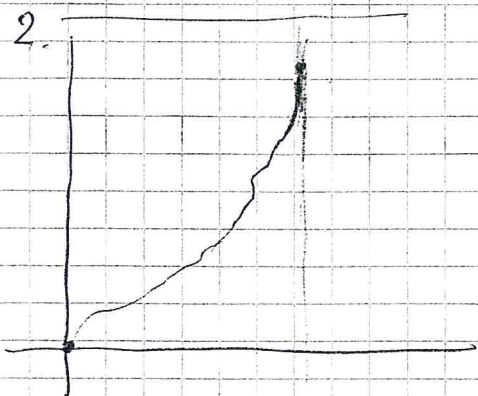
$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) ; x=1 \text{ max assoluto}$

3

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = +\infty, \quad f \in \mathcal{C}^1([0,1))$$

anziché

$$f \in \mathcal{C}^\infty([0,1))$$



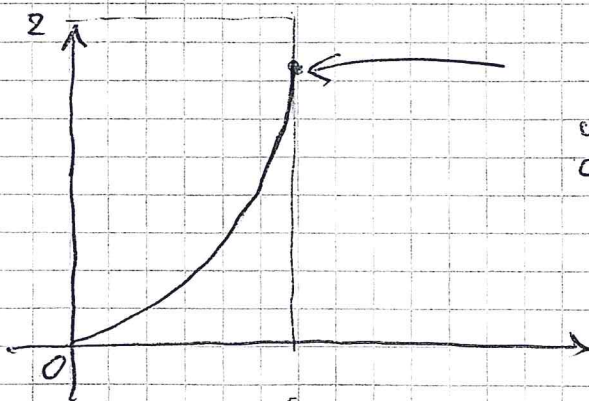
$$\forall x \in [0,1)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{d}{dx} \frac{x}{1-x}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \left[\frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{1}{(1-x)^2} > 0$$

$\Rightarrow f$ è strettamente convessa in $[0,1)$



$$\int_0^1 \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt < 2$$

$$? \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\sqrt{\frac{-x}{x-1}} \left(\sqrt{x}(x-1) + \sqrt{x-1} \ln(\sqrt{x-1} + \sqrt{x}) \right) \right)$$

$$? -\sqrt{1-x} \sqrt{x} - \arctan\left(\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right) + \pi/2 \quad \text{si ;}$$

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4/n}{\operatorname{tg}(4/n)} \right)^{n/\sin(3/n)} \quad \sqrt[4]{}$$

$$\frac{d}{dx} \left(-\sqrt{1-x} \sqrt{x} \right) - \frac{d}{dx} \arctan \sqrt{\frac{1-x}{x}} = ?$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \sqrt{1-x} + \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{1-x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1-x}{x}}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sqrt{\frac{1-x}{x}} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{1-x}} \left(-\frac{1}{x} - \frac{1-x}{x^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{1-x}} \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} + \sqrt{\frac{x}{1-x}} \frac{1}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x} + \sqrt{x}}{\sqrt{1-x} x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x} - (\sqrt{1-x}) + 1}{\sqrt{1-x} \sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{1-x} \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$$

Tentativo: $y = \sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow y^2 = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x = y^2 - y^2 x$

$$\begin{aligned} \ll dy &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{1}{(1-x)^2} dx \gg \\ &= \frac{1}{2y} \frac{1}{(1-x)^2} dx = \frac{1}{2y} \frac{1}{\left(1 - \frac{y^2}{1+y^2}\right)^2} dx \end{aligned}$$

$x = \frac{y^2}{1+y^2}$

$$\int \underbrace{\sqrt{\frac{x}{1-x}}}_{y} dx = \int y \cdot 2y \left(1 - \frac{y^2}{1+y^2}\right)^2 dy$$

$$= \int 2y^2 \frac{1}{(1+y^2)^2} dy$$

$$1) \frac{1}{n} = x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4x}{\operatorname{tg}(4x)} \right)^{\frac{1}{x \operatorname{sen}(3x)}};$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{4x}{\operatorname{tg}(4x)} \right)^{\frac{1}{x \operatorname{sen}(3x)}} &= e^{\operatorname{log} \left(\frac{4x}{\operatorname{tg}(4x)} \right)^{\frac{1}{x \operatorname{sen}(3x)}}} \\ &= e^{\frac{1}{x \operatorname{sen}(3x)} \operatorname{log} \left(\frac{4x}{\operatorname{tg}(4x)} \right)} \end{aligned}$$

Dobbiamo calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \operatorname{sen}(3x)} \operatorname{log} \left(\frac{4x}{\operatorname{tg}(4x)} \right)$$

$$\operatorname{sen} y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3) \quad \mu y \rightarrow 0$$

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{z^3}{3} + o(z^3) \quad \mu z \rightarrow 0$$

$$\operatorname{log}(1+\theta) = \theta - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{3} + o(\theta^3) \quad \mu \theta \rightarrow 0$$

$$\frac{4x}{4x + \frac{64x^3}{3} + o(x^3)} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{16}{3}x^2 + o(x^3)} = \left(1 + \frac{16}{3}x^2 + o(x^3)\right)^{-1}$$

$$(1+t)^{-1} = 1 - t + t^2 + o(t^2) \quad |_{t \rightarrow 0}$$

$$f(t) \quad f'(t) = -\frac{1}{(1+t)^2}, \quad f'(0) = -1$$

$$f''(t) = \frac{2}{(1+t)^3}, \quad f''(0) = 2$$

$$(*) = 1 - \left(\frac{16x^2}{3} + o(x^2)\right) = 1 - \frac{16}{3}x^2 + o(x^2)$$

$$\Rightarrow \log\left(\frac{4x}{f(4x)}\right) = \log\left(1 - \frac{16}{3}x^2 + o(x^2)\right)$$

$$= -\frac{16}{3}x^2 + o(x^2) + o(x^2) = -\frac{16}{3}x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{1}{x \sin(3x)} \log\left(\frac{4x}{f(4x)}\right) = \frac{1}{3x^2} \frac{1}{\sin(3x)} \log\left(\frac{4x}{f(4x)}\right)$$

$$= \frac{3x}{\sin(3x)} \frac{1}{3x^2} \left[-\frac{16}{3}x^2 + o(x^2)\right] \rightarrow -\frac{16}{9}$$

Il limite cercato è $e^{-16/9}$

Nota Si poteva usare $\log(1+t)^{-1} = -\log(1+t) \dots$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(16 \log(\cos x) - 4 \log(\cos(2x)) \right) \int_1^{\frac{1}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}} dt$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) = 1 + \theta$$

$$\log(1+\theta) = \theta - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^3}{3} + o(\theta^3)$$

$$\log(\cos x) = \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12} x^4 + o(x^4)$$

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{8} = -\frac{1}{12}$$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{2x^2}{2} + \frac{2x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$\log(\cos(2x)) = -2x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{2}4x^4 + o(x^4)$$

$$= -2x^2 + \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)$$

$$16 \log(\cos(x)) - 4 \log(\cos(2x))$$

$$= -8x^2 - \frac{4}{3}x^4 + 8x^2 + \frac{16}{3}x^4 + o(x^4) = +4x^4 + o(x^4)$$

$$\frac{16 \log(\cos x) - 4 \log(\cos(2x))}{x^4} \int_1^{\frac{1}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}} dt$$

Conti da ricontrollare!!

$$\frac{d}{dx} \left(\int_1^{1/x} t^3 e^{\frac{1}{t}} dt \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^4} \right)$$

$$= \frac{-\frac{1}{x^3} e^x \frac{1}{x^2}}{-4 \frac{1}{x^5}} \rightarrow \frac{1}{4}$$

Limite finale $4 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

Equazioni differenziali ordinarie

Incongnita: una funzione $u: \text{dom}(u) \rightarrow \mathbb{R}$

dati $a, b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni

continue, cercare $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$u'(x) + a(x)u(x) = b(x). \quad (30.8.1)$$

È generalizzazione del calcolo

delle primitive: prendiamo $a \equiv 0$

cercare u tale $u'(x) = b(x)$

Cerco una primitiva di b .

a, b funzioni assegnate: coefficienti
(in generale non costanti)

Le soluzioni di (30.8.1) sono infinite.

La soluzione diventa unica se

oltre alla (3.8.1) si impone una
ulteriore condizione su u ,

tipicamente $u(x_0) = u_0$

con x_0 e u_0 assegnati.

(3.8.1) del 1° ordine; il

massimo ordine di derivata di
 u che compare è il primo.

(3.8.1) è lineare (in u e u')

Se $b \equiv 0$ si dice omogenea,

se $b \not\equiv 0$ si dice non omogenea.

In definitiva:

Eq. diff. ordinaria del 1° ordine
lineare a coefficienti non costanti
non omogenea. Per questo

ho di equazioni esiste (!)

la formula integrale, per di sapere
fare degli integrali.