

Teo 2.1.1. $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad n+1 \text{ addendi}$$

Ricordo se $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{n-k}$$

$$n! := \prod_{j=1}^n j = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$0! := 1$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$n!$ numero degli anagrammi di una parola di n lettere distinte

Es 2.1.1 numero degli anagrammi di

MATEMATICA

$$\frac{10!}{2!3!2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2}$$

ES 2.2.1 trovare il numero degli anagrammi di NUMERO.

Significato di $\binom{n}{k}$. Questo è un caso particolare di quanto segue:

- Supponiamo di avere una parola di n lettere, con $m \leq n$ lettere
- distinte, la prima lettera si ripete k_1 volte, la seconda lettera si ripete k_2 volte, ... la m -esima lettera si ripete k_m volte

• (Caso ES 2.1.1 : $n = 10$, $m = 6$)

• $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, $k_3 = 2$, $k_4 = 1$, $k_5 = 1$, $k_6 = 1$,

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n \quad (2.2.1)$$

Il numero degli anagrammi di questa parola è:

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} \quad (2.2.2)$$

fattore multinomiale

3

$\binom{n}{k}$ caso particolare: pseudo una
parola di n lettere, con $2 \leq n$
lettere distinte

ABAAA BBBA

$$k_1 = k$$

$$k_2 = n - k$$

↑
dalla (2.2.1)

Si ha

$$(2.2.2) = \binom{n}{k} \text{ fattore binomiale}$$

Es 2.3.1 $(a+b+c)^n = ?$

Es 2.3.2 $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

= numero dei sottoinsiemi di un
insieme di n elementi

Dimostriamo ora teo 2.1.1

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

4

Per induzione su n .

1) $n=1$ $(a+b)^1 = a+b$

$$= \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^k b^{1-k}$$

$$= a^0 b^1 \binom{1}{0} + a^1 b^0 \binom{1}{1}$$

$$= b + a$$

Si

2) Supponiamo

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad (2.4.1)$$

devo dimostrare

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) (a+b)$$

uso la (2.6.1), ed l'ipotesi induttiva

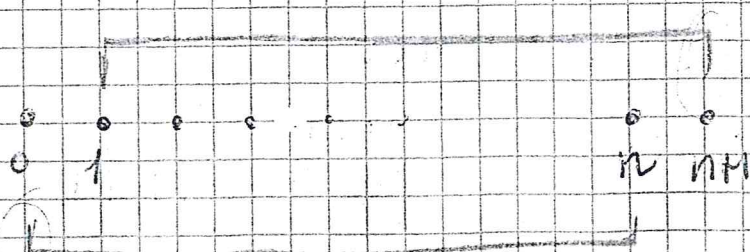
$$= a \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$

combo di variabile:

$$K+1 = h$$

$$= \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^h b^{n-h+1} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}$$



$$= \binom{n}{0} a^0 b^{n+1-0} + \sum_{j=1}^n \left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} \right] a^j b^{n+1-j} + \binom{n}{n} a^n b^{n+1-n}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k}$$

Ma

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad (2.6.1)$$

Si ha dunque

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

□

Resta la (2.6.1) e equivale a

$$\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!}$$

equivale a (moltiplicando tutto per $(k-1)!$)

$$\frac{n!}{(n-k+1)!} + \frac{n!}{k(n-k)!} \stackrel{?}{=} \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k}$$

Ricordare che $k! = k \cdot (k-1)!$

equivale a (dividendo tutto per $n!$)

$$\frac{1}{(n-k+1)!} + \frac{1}{k(n-k)!} \stackrel{?}{=} \frac{n+1}{(n+1-k)!k}$$

equivale a (moltiplicando tutto per $(n-k)!$)

$$\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k} \stackrel{?}{=} \frac{n+1}{(n+1-k)k}$$

$$\frac{k + n+1-k}{k(n+1-k)} //$$

ES 2.7.1 Dimostrare che

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^n \geq n! \geq 2^{n-1}$$

Abbiamo studiato alcune proprietà di $\mathbb{N}$,
abbiamo visto $\mathbb{Z}$. Ricordiamo

$\mathbb{Q}$ = numeri razionali

$$= \left\{ \frac{p}{q} ; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1 \right\}$$

È chiaro che

$$\mathbb{Q} \not\cong \mathbb{Z} \not\cong \mathbb{N} \cup \{0\} \not\cong \mathbb{N}$$

Esista una funzione

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

• iniettiva e suriettiva (cioè biettiva)

« Posso contare gli interi »

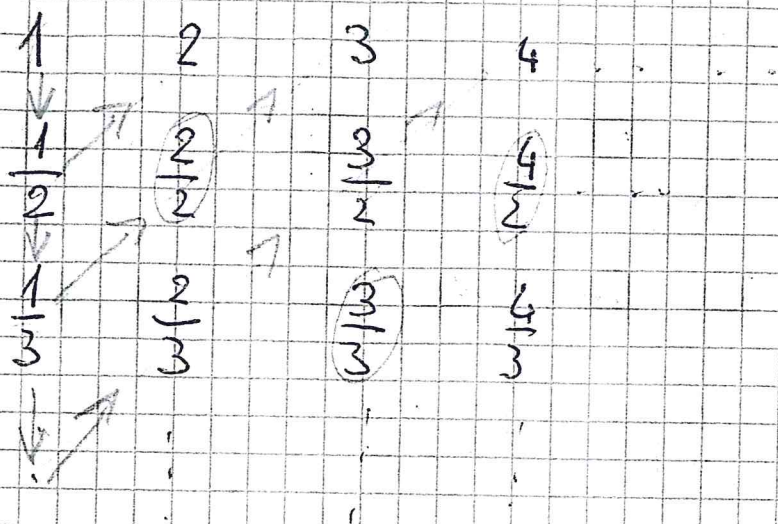
• « $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ hanno lo stesso "numero" di elementi »

+ difficile: Esiste una funzione
iniettiva e suriettiva

$$g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

• « $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ hanno lo stesso "numero" di elementi »

I razionali sono numerabili. Un modo per renderne conto è ad esempio cercare di trovare g biettiva: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$, i razionali positivi.



$$g: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}^+$$

Surgettiva
ma non iniettiva

$$1 \longrightarrow 1$$

$$2 \longrightarrow \frac{1}{2}$$

$$3 \longrightarrow 2$$

$$4 \longrightarrow \frac{1}{3}$$

$$5 \longrightarrow \frac{2}{2}$$

$$6 \longrightarrow 3$$

Si può comunque trovare una g
anche iniettiva.

Un modo per dimostrare che $\mathbb{Q}$ è
numerabile è:

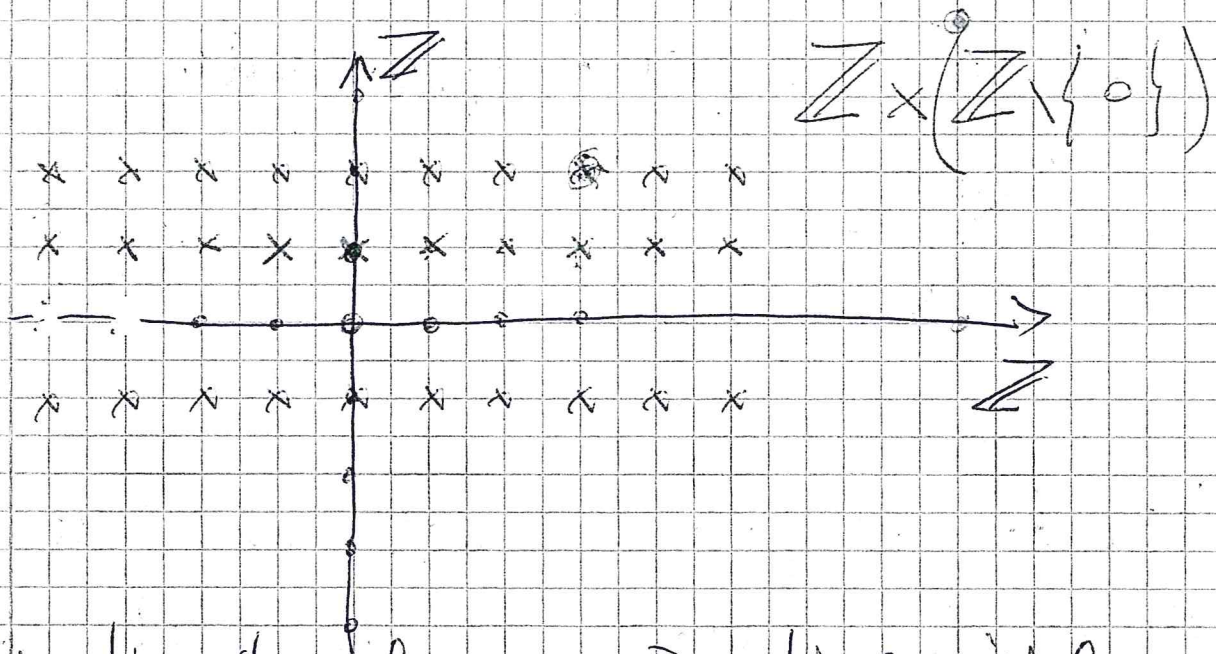
insieme $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Dimostrare che è un anello.

Costruisco $\mathbb{Q}$ come quoziente di $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$

$$(h, k), (h', k') \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$$

defino $(h, k) \sim (h', k')$ se

$$hk' = kh'$$



Si dimostra che $\sim$ è di equivalenza
 $a \sim a$ $\sim$ è riflessiva

$$a \sim b \Rightarrow b \sim a \quad \sim \text{ simmetrica}$$

$$a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c \quad \sim \text{ transitiva}$$

Dato un elemento $(p, q) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$
 definisco $[(p, q)]$ classe di equivalenza
 di (p, q) , come segue:

$$[(p, q)] = \{ (h, k) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) : \\ (h, k) \sim (p, q) \}.$$

L'insieme delle classi di equivalenza
 si chiama insieme quoziente,

$$\frac{\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})}{\sim} =: \mathbb{Q}$$

Usando le proprietà dell'insieme
 quoziente, dimostro a sua volta che
 $\mathbb{Q}$ è numerabile.

$\mathbb{Q}$ ha $<$ e $\leq$ (analoghe
 proprietà di pag 2 lezione 1)

oss Se $E \subseteq \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$, $E \neq \emptyset$, non
è detto che E ammetta minimo 12

Esempio $E = \{x \in \mathbb{Q} : x > 5\}$ non ha min

$x = \sqrt{2}$; $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Se per assurdo

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$; allora $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ con $\frac{(p,q)=1}{p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}}$

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$

$\Rightarrow p^2$ è pari $\Rightarrow p$ è pari

$p = 2k$ per un certo $k \in \mathbb{N}$

$$2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2$$

$\Rightarrow q^2$ è pari $\Rightarrow q$ è pari.

Dunque $2|p$, $2|q$ ma $(p,q)=1$,
assurdo. $\square$

$$E = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq \sqrt{2}\}$$

Ricapitoliamo:

$\mathbb{Q}$ è infinito $\neq \mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$ è numerabile

$(\mathbb{Q}, \leq)$ è totalmente ordinato

Non è bene ordinato

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Su $\mathbb{R}$ $0 < \epsilon \leq$
come al solito

4,3127004...

0,99999...

1,00000...

$\mathbb{R}$ è molto + complicato di $\mathbb{Q}$

$(\mathbb{R}, \leq)$ è totalmente ordinato

$(\mathbb{R}, \leq)$ non è bene ordinato

Teo 2.13. $\mathbb{R}$ NON è NUMERABILE.

Non esiste una funzione

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

iniettiva e suriettiva.

Dim. Se faccio vedere 14

che $[0, 1)$ non è numerabile,
a mappa razionale $\mathbb{R}$ non sarà
numerabile

• $[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$

• 0, 3519...

0, 999 17

(2.14.1)

0, . . .

↑
elemento di $\mathbb{N} \cup \{0\}$

• Voglio fare vedere che tutti i numeri
della forma (2.14.1) «non si possono
contare», cioè che non posso

trovare $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$

iniettiva e surgettiva.

Supponiamo per assurdo di poterlo fare:

$$\begin{aligned}
 r_1 & 0, \textcircled{4} 725900 \dots \\
 r_2 & 0, 3\textcircled{2} 94 \dots \\
 r_3 & 0, 54\textcircled{5} 5542 \dots \\
 r_4 & 0, 99234512 \dots
 \end{aligned}$$

Consideriamo r_k , il k -esimo numero reale: ne considero la k -esima cifra dopo la virgola, chiamandola x_k . Definisco y_k come segue

$$y_k = \begin{cases} 5 & \text{se } x_k = 4 \\ 4 & \text{se } x_k \neq 4 \end{cases}$$

e mi costruisco il numero reale che ha come k -esima cifra dopo la virgola proprio y_k

$$x_1 = 4 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 5 \quad x_4 = 3$$

$$y_1 = 5 \quad y_2 = 4 \quad y_3 = 4 \quad y_4 = 4$$

$$z = 0, 5444 \dots \in [0, 1)$$

Ammettiamo che z sia dopo la virgola da un certo punto in poi, ma non 9 dopo la virgola da un certo punto in poi.

Per ipotesi (assurda) $\mathbb{Z}$ è un
elemento della lista, così

$$\exists h \in \mathbb{N} : \quad \mathbb{Z} = r_h$$

Guardiamo la h -esima cifra di r_h :

$$\begin{aligned} \therefore \text{lista } i &= 5 & \text{ se } i = 4 \\ &= 4 & \text{ se } i \neq 4 \end{aligned}$$

impossibile, $\square$