

Teo (Fond. calcolo integrale) 29.1.1,

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$.

Allora posto

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \forall x \in [a, b],$$

si ha $F \in \mathcal{C}^1([a, b])$, e $F' = f$ in $[a, b]$.

Nota: $F(a) = 0$.

Dim Sia $x \in [a, b]$, e $h \in \mathbb{R}$ s.t. $x+h \in [a, b]$
 $h \neq 0$

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right]$$

Sappiamo che $\forall \alpha, \beta, \tau \in \mathbb{R}$ ^{double} si ha

$$\int_{\alpha}^{\beta} f dt = \int_{\alpha}^{\tau} f dt + \int_{\tau}^{\beta} f dt$$

$$\Rightarrow \int_a^{x+h} f dt = \int_a^x f dt + \int_x^{x+h} f dt$$

$$\Rightarrow \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

Devo dim. che $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \in \mathbb{R}$

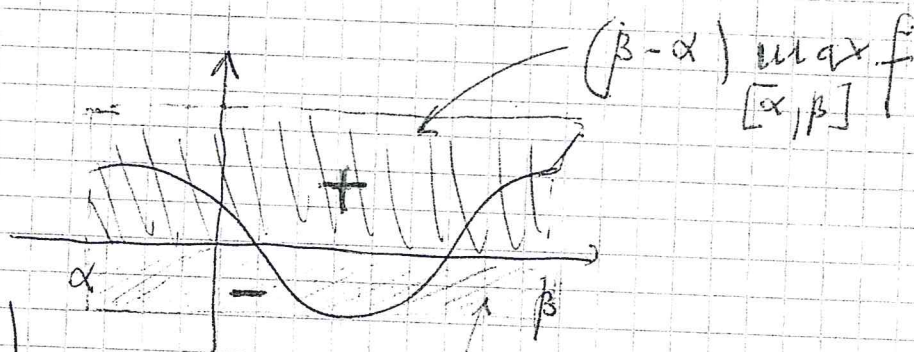
3

inchi $h \in \mathbb{R} : x+h \in [a, b], h \neq 0$

OSS 29.2.1

$\forall \alpha, \beta \in \text{dom}(f), \beta \geq \alpha$

$$(\beta - \alpha) \min_{[\alpha, \beta]} f \leq \int_{\alpha}^{\beta} f dt \leq \max_{[\alpha, \beta]} f (\beta - \alpha)$$



(Lo stesso vale se $\beta \leq \alpha$)

$(\beta - \alpha) \min_{[\alpha, \beta]} f$

Devo dim. che $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$

in $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : x+h \in [a, b];$ si ha

$$\min_{[\min(x, x+h), \max(x, x+h)]} f \leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \leq \max_{[\min(x, x+h), \max(x, x+h)]} f$$

Dico che $\exists \xi_h \in [\min(x, x+h), \max(x, x+h)] :$

$$f(\xi_h) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

questo è conseguenza della continuità di f
e del teorema dei valori intermedi.

Dunque

$$\min_{[\min(x, x+h), \max(x, x+h)]} f \leq f(\xi_h) \leq \max_{[\min(x, x+h), \max(x, x+h)]} f$$

$$\begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ x & \xi_h & x+h \\ \downarrow & & \end{array}$$

Per $h \rightarrow 0$ si ha $\xi_h \rightarrow x$

Ma f è continua in $[a, b]$, $x \in [a, b]$
e quindi f è continua in x . Perciò

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = f(x) \in \mathbb{R}$$

Ne deduce

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) \quad \square$$

Nota F è derivabile in $[a, b]$, e dato che $F' = f$
e f è continua in $[a, b]$, allora F' è continua in $[a, b]$.

oss 29.4.1

Sia G una primitiva di f

allora
$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) dx \quad (29.4.1)$$

In fatti teo 29.1.1 $\Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt$

è una primitiva. Dunque

$$\exists c \in \mathbb{R} : F(x) - G(x) = c \quad \forall x.$$

b al posto di x

$\Rightarrow$

$$F(b) - G(b) = c$$

a al posto di x

$\Rightarrow$

$$F(a) - G(a) = c$$

$$\Rightarrow F(b) - G(b) = F(a) - G(a)$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$$

|| $F(a) = 0$

$$\int_a^b f(t) dt$$

oss 29.4.2.

Se f è derivabile

$$(4.4) \quad \int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$$

(basta scegliere come G proprio f nella oss. 29.4.1)

«

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x) dx = f(b) - f(a)$$

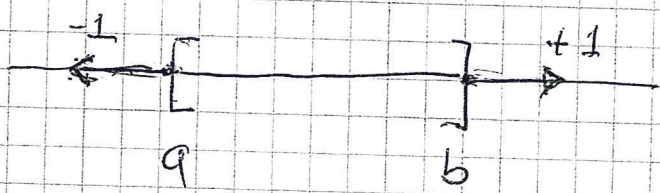
>>

Nota

$\int_a^b f'(t) dt$ dipende solo dai

valori di f al ∂ di $[a, b]$, più i

$$= f(b) - f(a) = f(b) \cdot 1 + f(a) \cdot (-1)$$



$$= f(b) \cdot \underset{\text{est ad } [a, b]}{\nu(b)} + f(a) \cdot \underset{\text{est ad } [a, b]}{\nu(a)}$$

Versione unidimensionale del teorema della divergenza.

Inoltre $\int_a^b f'(t) = f(b) - f(a)$ è un caso

particolare (ma equivalente) del teo di integrabili per parti.

Teo 29.6.1

Siano $f, g \in \mathcal{C}^1(I)$

6

I intervallo, sia $[a, b] \subseteq I$. Allora

$$\int_a^b f g' dx = - \int_a^b f' g dx + \underbrace{[fg]_{x=a}^{x=b}}_{\text{« zero al bordo »}}$$

dove $[fg]_{x=a}^{x=b}$ vuol dire $f(b)g(b) - f(a)g(a)$

oss 29.6.1

Se $g \equiv 1$ trova

$$0 = - \int_a^b f' dx + f(b) - f(a)$$

che è la (29.4.2).

Dimi « versione integrale della derivata del prodotto »

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{in } [a, b]$$

$$\Rightarrow \int_a^b (fg)' dx = \int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx$$

$f(b)g(b) - f(a)g(a)$ dalla (29.4.2) con fg al posto di f $\square$

3

ES 29.7.1 $\frac{d}{dx} \int_a^{f(x)} g(t) dt$ (29.7.1)

$\frac{d}{dx} \int_a^{h(x)} h(t) dt$ (29.7.2)

Si ha che $\int_a^{f(x)} g(t) dt = G(f(x))$

dove $G(w) = \int_a^w g(t) dt$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} \int_a^{f(x)} g(t) dt = \frac{d}{dx} G(f(x))$

$= G'(f(x)) f'(x) = g(f(x)) f'(x)$

Per casa la (29.7.2)

2) di ieri

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (16 \log(\cos x) - 4 \log(\cos(2x))) \int_1^{\frac{1}{x}} t^3 e^{\frac{1}{t}} dt$$

2')
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{(\sin x)^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt}{x^\alpha}, \quad \alpha > 0$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{(\sin x)^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt = \frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{1+(\sin x)^6}}$$

$$\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

il quoziente delle derivate risulta

$$\frac{2 \sin x \cos x}{\sqrt{1+(\sin x)^6}} \cdot \frac{1}{\alpha x^{\alpha-1}}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 1 \\ +\infty \end{cases} \quad \begin{matrix} \alpha = 1 \\ 1 < \alpha < 2 \\ \alpha = 2 \\ \alpha > 2 \end{matrix}$$

$$x > 0, \quad x^\alpha = e^{\alpha \log x}$$

Teo 29.9.1

(Cambio di variabile negli integrali)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Sia $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ derivabile

Sia $F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$

Allora

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds \quad (29.9.1)$$

Se poi φ è invertibile: $\int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds$

Dim $\forall s \in [\alpha, \beta]$ si ha

$$\frac{d}{ds} F(\varphi(s)) = F'(\varphi(s)) \varphi'(s) = f(\varphi(s)) \varphi'(s)$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{ds} F(\varphi(s)) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds$$

$$\parallel$$

$$F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_a^{\varphi(\beta)} f(t) dt - \int_a^{\varphi(\alpha)} f(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt$$

□