

Def 27.1.1 $f \in C^2((a,b))$ si

dice convessa se $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Si dice strettamente convessa se $f''(x) > 0$
 $\forall x \in (a,b)$.



Analog: concava $f \rightarrow -f$, cioè concava
se $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$,
e strettamente concava se $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Questo appena dato non è la ^{definitiva} definitiva
di convessità; in rete ho lasciato
un file sulla convessità in 1-variabili.

Teoria della misura e dell'integrazione

Lavoriamo su $\mathbb{R}$. La prima cosa da fare è definire il concetto di lunghezza per un sottoinsieme di $\mathbb{R}$, in modo «naturale». Questo concetto verrà chiamato misura (di Peano-Jordan) e l'integrale corrispondente: integrale di Riemann.

Migliorando (con «poca» fatica) il concetto di lunghezza, seguendo lo stesso schema, si arriverebbe all'integrale di Lebesgue.

$\mathcal{P}$ = famiglia dei pluri-intervalli di $\mathbb{R}$;

$P \in \mathcal{P}$ P è una unione finita di

intervalli. Qui per intervallo si intende:

$$a, b \in \mathbb{R}, \quad [a, b) = \begin{cases} \{x: a \leq x < b\} & \text{se } a < b \\ \emptyset & \text{se } a \geq b \end{cases}$$



Un pluriintervallo può essere pensato come ³
una unione finita di intervalli disgiunti.

La lunghezza di $[a, b]$, $l([a, b]) =$
$$= \begin{cases} b-a & \text{se } b > a \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$l : \mathcal{P} \longrightarrow [0, +\infty)$$

$$P = \bigcup_{i=1}^m [a_i, b_i] \quad \text{tra loro disgiunti,}$$

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_m < b_m$$

$$l(P) := \sum_{i=1}^m (b_i - a_i)$$

? Come dare una nozione di
lunghezza, sapendo per i pluri-intervalli,
a tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$?

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty]$$

↑ classe di tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$E \subseteq \mathbb{R} \quad \mu(E) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^m (b_i - a_i) : \bigcup_{i=1}^m [a_i, b_i] \supseteq E \right\}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{m \in \mathbb{N}}$

Se E non è limitato $\mu(E) = +\infty$ 4
(non c'è un ricoprimento finito di E
con intervalli) $\nexists \phi := +\infty$

Se E è limitato, $\mu(E) \in [0, +\infty)$

La μ si chiama misura esterna
di Peano-Jordan

Proprietà

$$\mu([a, b]) = b - a$$

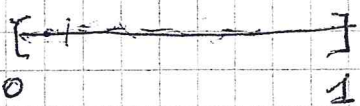
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^m [a_i, b_i]\right) = \sum_{i=1}^m (b_i - a_i)$$

intervalli disgiunti

Inoltre si ha:

$$E, F \subseteq \mathbb{R} \quad \mu(E \cup F) \leq \mu(E) + \mu(F)$$

$$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1] ; \mu(E) = ?$$


$$[0, 1]$$

$$\text{Se } \bigcup_{i=1}^m [a_i, b_i] \supseteq [0, 1] \cap \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$\bigcup_{i=1}^m [a_i, b_i] = [0, 1]$$

$$\Rightarrow \mu([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 1$$

151

risultato

insoddisfacente.

Parentesi: se al posto di "finita" a pag 2,3 mettessi "numerabile"

avrei la misura di Lebesgue, $\mathcal{L}$, e verrebbe $\mathcal{L}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$.

Intuitivamente:

$$\{q_1, q_2, q_3, \dots\} = \mathbb{Q} \cap [0,1]$$

$$\varepsilon > 0, \quad \left[q_i - \frac{\varepsilon}{2^i}, q_i + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) = I_i$$

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i \supset \mathbb{Q} \cap [0,1]; \quad \text{lunghezza} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right)$$

$$\begin{aligned} &\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{2}{2^i} = \varepsilon \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = \\ &= \varepsilon \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = \varepsilon \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\varepsilon \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) \leq 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

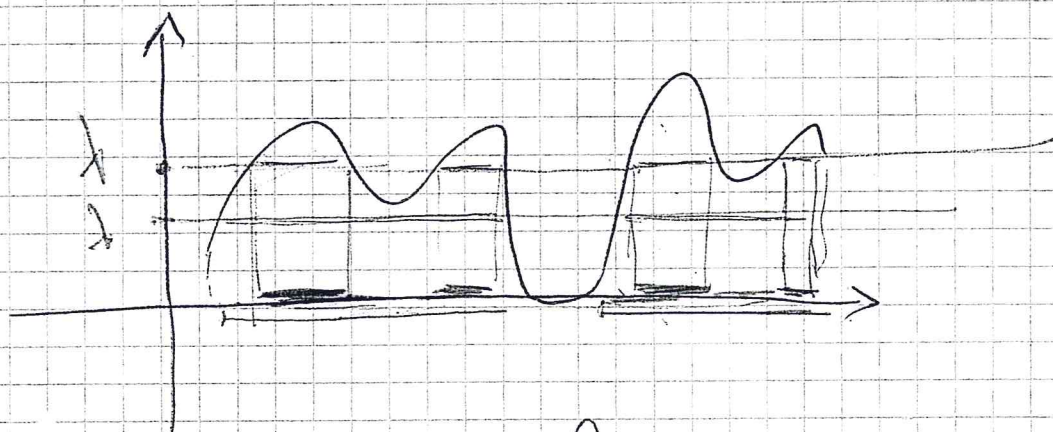
$$\Rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$$

Passiamo all'integrale di una funzione
"in $d\mu$ ".

Comincio con μ di Lebesgue

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \geq 0.$$

$D \subset \mathbb{R}$



Idea pensare una funzione come
l'unione dei suoi spike:

Def 27.6.1 $\lambda \geq 0$

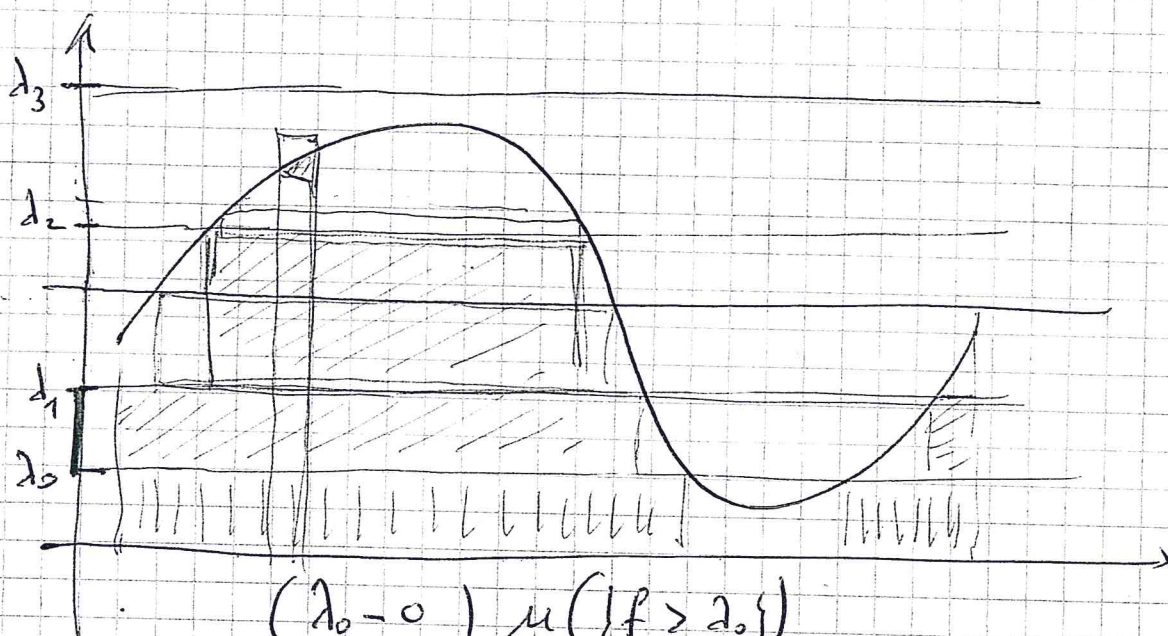
$$\{x \in D : f(x) > \lambda\} \quad \lambda\text{-spike}$$

$$\text{se } \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow \{f > \lambda_1\} \supseteq \{f > \lambda_2\}$$

Dato che μ è la lunghezza dei spike,
"Sommare" tante striscie orizzontali,
maper n'è so a definire l'area della
regione compresa tra $\text{graf}(f)$ e $\text{axe delle } x$.

Def 27.7.1 Sia $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$.

Sia $\Lambda = \{ \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m \}$ con
 $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_m$, famiglia
 finita di livelli ("di taglio")



$$\begin{aligned}
 & (\lambda_0 - 0) \mu(\{f > \lambda_0\}) \\
 & + (\lambda_1 - \lambda_0) \mu(\{f > \lambda_1\}) + \\
 & + (\lambda_2 - \lambda_1) \mu(\{f > \lambda_2\}) \\
 & + (\lambda_3 - \lambda_2) \mu(\{f > \lambda_3\})
 \end{aligned}$$

Si dice subintegrale di f
 su D rispetto a Λ

$$\int_{D, \Lambda} f d\mu$$

$$= \sum_{i=0}^{m-1} (\lambda_i - \lambda_{i-1}) \mu(\{f > \lambda_i\}), \quad \lambda_{-1} := 0$$

Def 27.8.1

8

$$\int_D f d\mu = \int_D f dx = \int_D f(x) dx$$

$$= \int_D f(x) d\mu(x) :=$$

$$\sup \left\{ \int_{D_\lambda} f d\mu : \lambda \in (0, \infty) \right\}$$

A famiglia finita di livelli

Proprietà :

$$\int_{[a,b] \cup [c,d]} f dx = \int_{[a,b]} f dx + \int_{[c,d]} f dx$$

$b \leq c$

cioè l'integrale è additivo

• Se $\alpha > 0$

$$\int_D \alpha f dx = \alpha \int_D f dx$$

• Per tutte le funzioni f, g che incontreremo

in analisi 1,

$$\int_D (f + g) dx = \int_D f dx + \int_D g dx$$

ad esempio f, g continue,

Abbiamo definito $\int_{[a,b]} f dx$

A noi capiteranno f continue su $[a,b]$,
 oppure monotone in $[a,b]$, comunque
 limitate. Il caso di f non limitata
 verrà trattato in seguito.

Def 27.9.1
 siano $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b f dx := \begin{cases} \int_{[a,b]} f dx & \text{se } a < b \\ - \int_{[b,a]} f dx & \text{se } b < a \end{cases}$$

Vale

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Vale ancora:

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

(additività)

(linearità)

$$\int_a^b (f+g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$$

Infine, se f ha valori reali, si definisce

$$\int_D f dx = \int_D f^+ dx - \int_D f^- dx, \text{ purché}$$

non si abbia

10

Teo 27.10.1 (fondamentale del calcolo integrale)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ f continua in $[a, b]$.

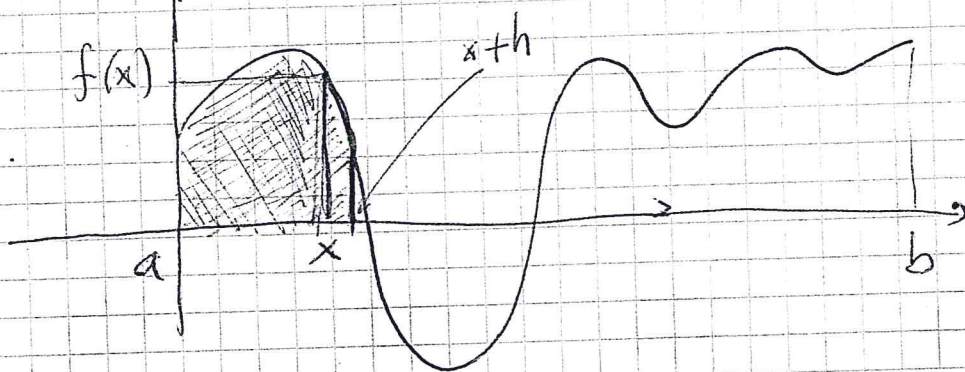
Allora $\forall x \in [a, b]$ poss. definire

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

e si ha che F è derivabile

in $[a, b]$, e $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in [a, b]$.

Nda $F(a) = 0$



«
$$F'(x) \approx \frac{F(x+h) - F(x)}{h} =$$

$$= \frac{\text{area}(\text{shaded strip})}{h} \approx f(x) \gg$$

27.10.1

Def $\forall$ Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a, b]$.

Una primitiva di f in $[a, b]$ è una

funzione $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

derivabile in $[a, b]$, con $G' = f$.

oss 27.11.1

È chiaro che se G è una primitiva di f e $\alpha \in \mathbb{R}$, $G + \alpha$ è ancora una primitiva di f .

Il teo 27.10.1 dice che

$\int_a^x f(t) dt$ è una primitiva di f ,
e si annulla in $x=a$.

Es $\int_1^x t^2 dt = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} = \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^x$

oss 27.11.2 Se G, H sono due primitive di f , allora $\exists c \in \mathbb{R}: G(x) - H(x) = c$

$\forall x \in [a, b]$. Infatti, per definizione 27.10.1

$$\begin{aligned} G' &= f, \quad H' = f \Rightarrow G' - H' = 0 = \\ &= (G - H)' \Rightarrow G - H \text{ è costante in } [a, b]. \end{aligned}$$

$$\int_0^x \cos t \, dt = \sin x$$

$$\int f(x) \, dx \stackrel{\text{not}}{=} \{ F : F' = f \}$$

$$\int t^2 \, dt = \left\{ \frac{t^3}{3} + C : C \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx & \qquad \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \\ & = 1 - \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx &= \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \, dx \\ &= x - \arctan x + C \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \, dx$$