

Teo 26.1.1 f, g funzioni definite su una

semiretta destra, derivabili, $g'(x) \neq 0$

$\forall x \in \text{dom}(g)$, e supponiamo

$$\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} =: l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Allora, risulta

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x),$$

si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Questo è De L'Hopital in un intervallo illimitato.

ES 26.1.1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2) \sqrt{1-x^2} - x(e^{2x} - 1)}{3x(e^{-2x} - 1 + \ln(2x))}$$

farlo usando Taylor. La difficoltà concettuale può stare nel fatto che non è

sempre evidente a che ordine fermare

gli sviluppi; lo si capisce meglio se si fa l'esercizio.

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)$$

$$\sin(2x^2) = 2x^2 - \frac{4}{3}x^6 + o(x^6) = \overbrace{2x^2 + o(x^2)}^{2x^2 + o(x^2)} = \sqrt{\alpha < 6}$$

dove con la scrittura $o(y^3)$ intendo

una funzione definita in cui abbiamo ^I di

zero tale che $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{o(y^3)}{y^3} = 0$ in $I \setminus \{0\}$

$$\text{se } y = 2x^2 \Rightarrow o(y^3) = o(8x^6) = o(x^6)$$

$$\text{Cioè } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \lambda o(x^q) = o(x^q) \\ = o(\lambda x^q)$$

$$\sqrt{1-z} = (1-z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}z + o(z)$$

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2}z^2 + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

$$f'(z) = -\frac{1}{2(1-z)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow f'(0) = -\frac{1}{2}$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^w = 1 + w + \frac{w^2}{2} + o(w^2)$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$$

$$t = \log t = g(0) + g'(0)t + \frac{g''(0)}{2}t^2 + \frac{g'''(0)}{3!}t^3 + o(t^3)$$

$$g'(t) = 1 + (\log t)^2$$

$$g''(t) = 2 \log t (1 + (\log t)^2)$$

$$g'''(t) = 2(1 + (\log t)^2)^2 + \text{was aber 0 bei } t=0$$

$$g'(0) = 1$$

$$g''(0) = 0$$

$$g'''(0) = 2$$

$$g(t) = t + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

$$\Rightarrow \log(2x) = 2x + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\begin{aligned} \square &= \frac{(2x^4 + o(x^6)) \left(1 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^2)\right) - x(2x + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3))}{3x(-2x + 2x^2 + o(x^2) + 2x + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)) - 2x^3 + o(x^3)} \\ &= \frac{\dots}{3x(2x^2 + o(x^2))} \rightarrow -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

ES 26.3.1 (com)

$\lim_{x \rightarrow +\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin \sqrt{x} - x \sqrt{x}}{(\log x)^{5/2}}$$

ES 26.4.1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(1 - \cos x) - \lg(\pi/4 - x)}{x \sin x}$$

Tco (Formula di Taylor con resto di Peano) 26.4.1

Sia $f: [x_0, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$

derivabile $(n-1)$ volte in $[x_0, x_0 + \delta]$

e n volte in x_0 . Allora per $x \rightarrow x_0^+$ si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots$$

$$+ \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1} + \underbrace{\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + o(1) \right)}_{\text{Resto di Peano}}$$

Resto di Peano

dove $o(1)$ indica una funzione che

tende a zero per $x \rightarrow x_0^+$ (naturalmente

$o(1)$ dipende da x_0 e da x).

Dim $[AB], [G], [CS], [Prod]$ ecc.

□

Def 26.5.1 $f: [x_0, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$

f dice differenziabile in x_0

se $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{f(x) - (f(x_0) + \lambda(x - x_0))}{(x - x_0)} \xrightarrow{0} \text{ per } x \rightarrow x_0$$

Ricorda: f derivabile in x_0 se

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \quad \text{su } (x_0, x_0 + \delta]$$

$$\frac{f(x) - [f(x_0) + l(x - x_0)]}{(x - x_0)} = o(1) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{diventa} \\ \text{falso in} \\ \text{+ variable} \end{array} \rightarrow$$

Proprietà: f deriv. in $x_0 \iff f$ differenziabile in x_0

ES 26.5.1

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x}{1 - (\cos x)^3 - \frac{1}{2} x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{4} x^8 + 8 (\cos x - e^{-x^2}) + x^6 + x^9}{12x^9 + x^2 (\cos x)^2 (1 - \cos x)^2 - \frac{x^6}{4}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{((3n)!)^{1/3}}{(n+1)! - n!}$$

Def 20.9.1. Supponiamo di avere $f, g: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x_0 \in I$, f, g positive (se
no si pensa ai valori assoluti)

(Si può fare il caso $+\infty$ al posto di x_0
con modifiche semplici). Scrivo

$$f = o(g) \quad \text{per } x \rightarrow x_0$$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Si dice in tal caso che f è un infinitesimo
di ordine maggiore di g per $x \rightarrow x_0$

$$\begin{aligned} f &= o(g) \\ h &= o(g) \end{aligned} \Rightarrow f + h = o(g)$$

$$\lambda > 0 \Rightarrow \lambda f = o(g)$$

$$\text{se } g = o(\varphi) \Rightarrow f = o(\varphi)$$

$$\text{Scrivo } f = O(g)$$

$$\text{se } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \neq 0 \text{ finito}$$

$$f = O(g), \quad g = O(f) \Leftrightarrow f = \Theta(g)$$

ES 26.7.1

$$f(x) = \arctan x$$

$$x_0 = 0 \quad \text{in Simplifiziert}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{-2}{(1+x^2)^2} - \frac{8x^3}{(1+x^2)^3}$$

$$f(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + f^{(iv)}(c(x_0, x)) \frac{x^4}{4!}$$

Lagrange

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad \text{für } x \rightarrow 0$$

$$f^{(iv)}(x) = \frac{8x}{(1+x^2)^3} - \frac{18x}{(1+x^2)^3} + \frac{48x^3}{(1+x^2)^4}$$

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \quad \forall x \in [3, 4]$$

Nun losse schreiben

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + O(x^4)$$