

Def 25.1.1 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

derivabile in $[a, b]$, $x_0 \in (a, b)$.

x_0 si dice punto stazionario di f
(o critico^{diff}) se $f'(x_0) = 0$

I massimi e i minimi, assoluti o locali, interni sono stazionari.

Il viceversa in generale non è vero, cioè un punto stazionario interno non è detto che sia max/min loc



$$y = x^3$$

$x=0$ è stazionario

$\max_{x=0}$ non è né $\max$ loc né $\min$ loc.

Si cercano allora condizioni ulteriori su un punto stazionario x_0 che garantiscano che x_0 sia $\max$ loc o $\min$ loc.

Teo 25.2.1 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

- derivabile 2 volte (rispettivamente $n \geq 2$ volte)
con derivate continue (con derivate continue)

Supponiamo

$x_0 \in (a, b)$ punto critico ^{di f} , $f'(x_0) = 0$

(rispett. $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$)

Supponiamo inoltre

$$f''(x_0) > 0 \quad (25.2.1)$$

(rispettivamente $f^{(n)}(x_0) \neq 0$)

Allora x_0 è minimo locale stretto di f

(rispettivamente se n pari, $f^{(n)}(x_0) > 0$) (25.2.2)

ha minimo locale stretto, se

n è dispari x_0 non è né min loc

né max loc)

Indichiamo se al posto di (25.2.1) ho

(*) $f''(x_0) \geq 0$ non posso dedurre nulla

(analog. in (25.2.2).)

Oss 25.2.1.

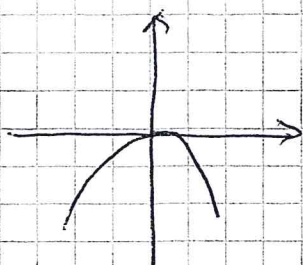
x_0 di minimo locale stretto

CASA

masob

non implica necessariamente $f''(x_0) > 0$, $f''(x_0) \geq 0$.

(*)

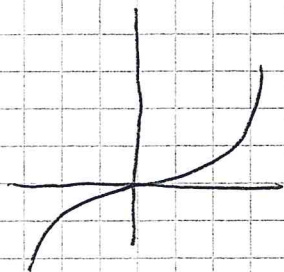


$$y = -x^4$$

$$f'(0) = 0$$

$$f''(0) = 0 \quad (\text{dunque } f''(0) \geq 0)$$

max = 0 max



$$y = x^3$$

$$f'(0) = 0$$

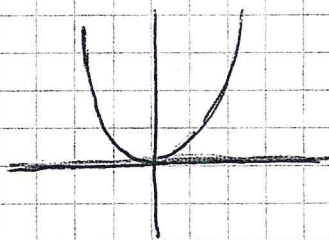
$$f''(0) = 0 \quad (\text{dunque } f''(0) \geq 0)$$

max = 0 non è ne max
ne min.

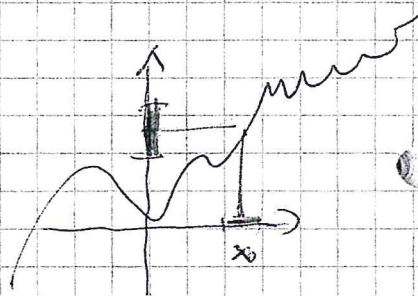
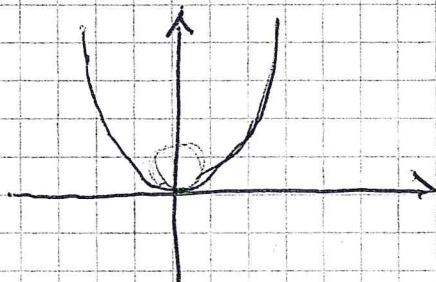
Per motivare OSS 25.2.1

$$y = x^4$$

$x=0$ è min stretto
ma $f''(0) = 0$



$$y = x^2$$



(teo permanenza segno)

ES $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua in $x_0 \in (a, b)$

$f(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \rho > 0 : f(x) > 0 \quad \forall x \in B_\rho(x_0) \cap [a, b]$

Dim (teo 25.2.1)

$n=2$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2$$

$\forall x \in [a, b]$, dove $c = c(x, x_0)$

Sta "tra x_0 e x "

Ma x_0 è punto critico di $f \Rightarrow$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f''(c)}{2}(x-x_0)^2 \quad (25.4.1)$$

↑ Se prendo $p > 0$ sufficientemente piccolo,
(poiché f'' è continua in $[a, b]$,

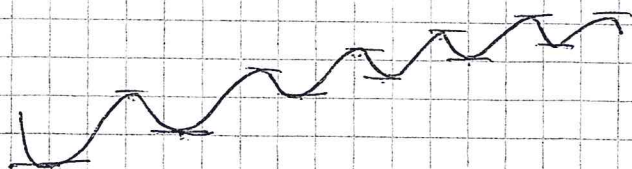
da $f''(x_0) > 0$ segue $f''(y) > 0$

$\forall y \in B_p(x_0) \cap [a, b]$ (dal teo di permanenza del segno)

Prendiamo un tale p ;

da (25.4.1) deduc

$$f(x) - f(x_0) > 0 \quad \forall x \in B_p(x_0) \setminus \{x_0\}$$



$n=2$

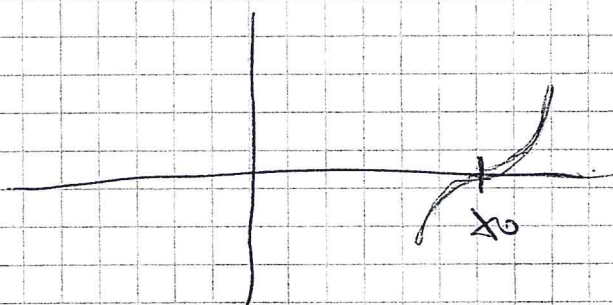
Caso $n > 2$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

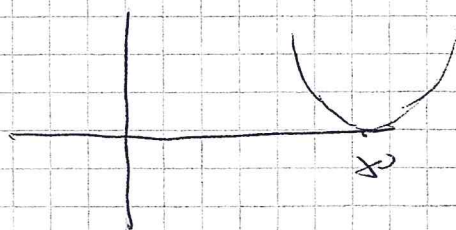
$$= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$(x-x_0)^n = \begin{cases} > 0 & \text{se } x \neq x_0 \text{ se } n \text{ par} \\ > 0 & \text{se } x > x_0 \\ < 0 & \text{se } x < x_0 \end{cases} \text{ se } n \text{ dispar}$$



n dispar



n par

Se $n \equiv 0(2)$ la dim. è come nel cap. 6

$$n=2.$$

Se $n \equiv 1(2)$ allora sappiamo $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

ci sono due casi:

$$f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \rho > 0 :$$

$$f^{(n)}(y) > 0 \quad \forall y \in B_\rho(x_0) \cap [a, b]$$

ma $(x-x_0)^n$ cambia segno

e dunque x_0 non è né max né min.

La dim. se $f^{(n)}(x_0) < 0$ è
analoga. $\square$

Es 25.6.1 $f(x) = \operatorname{arctg} \left(\left| \frac{-x+1}{x+1} \right| \right)$

$$\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f \in \mathcal{C}(\operatorname{dom}(f))$$

$$g(y) := \operatorname{arctg} y \quad \forall y \in \mathbb{R} : g \in \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$$

$\Rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ cioè g è derivabile un

qualsunque numero di volte su $\mathbb{R}$ e
ha derivate continue.

Posto $h(x) := \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$\text{dom } h = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$h \geq 0 \quad h=0 \Leftrightarrow x=1$

Per controllare dove una funzione
del tipo $|q(x)|$ è

derivabile (quando q è in ipotesi

derivabile dappertutto nel suo dominio):

certamente la derivabilità si mantiene

nei punti x dove $q(x) \neq 0$, ma

si può perdere nei punti x dove $q(x)$
 $= 0$.

Nel nostro caso, h non viene derivabile

in $x=1$; in $x \neq 1$

$h'(x) = \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \left(\frac{-1}{1+x} - \frac{1-x}{(1+x)^2} \right)$

$v(y) = |y|$; $y \neq 0 \Rightarrow v'(y) = \begin{cases} 1 & y > 0 \\ -1 & y < 0 \end{cases} = \frac{y}{|y|}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h'(x) = \frac{1}{2}$$

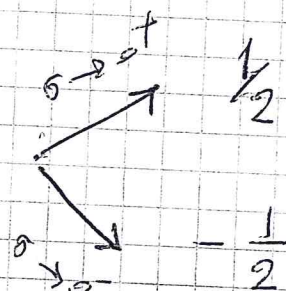
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h'(x) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{h(1+\sigma) - h(1)}{\sigma} = \frac{h(1+\sigma)}{\sigma}$$

$$= \frac{1}{\sigma} \left| \frac{1 - (1+\sigma)}{1 + 1+\sigma} \right| = \frac{1}{\sigma} \left| \frac{\sigma}{2+\sigma} \right|$$

$$\sigma \neq 0$$

$$= \frac{1}{|2+\sigma|} \frac{|\sigma|}{\sigma}$$



$$\Rightarrow \nexists h'(1)$$

Vedo subito $f(\mathbb{R} \setminus \{-1\}) = f(\text{dom}(f))$

$$\subseteq [0, \pi/2), \quad f(1) = 0$$

$\Rightarrow x=1$ è min. assoluto di f

l'unico

Nota non può invocare teo Weierstrass

(teo 19.5.1) per dire che f ammette
minimo, richiede $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Non è compatto

Completare lo studio di f

ES 25.10.1 (casa) Dire se la

funzione $f(x) = \arccos(1 - \sqrt{1-x^2})$, $x \in \text{dom}(f)$
ammette max/min, e se si trovano
lo stesso in $g(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right|$, $x \in \text{dom}(g)$

Teo 25.10.1 Siano $f, g: [x_0, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$, f, g deri-
vabili in x_0 , $g'(x_0) \neq 0$.

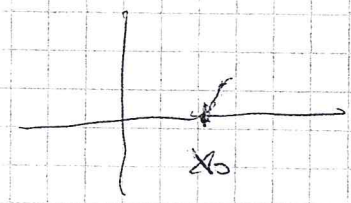
Allora $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

in $(x_0, x_0 + \delta]$

Dim $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$

nota in un intorno di x_0 (in $(x_0, x_0 + \delta]$)

si ha $g(x) \neq 0$
(teo 10.1.1)



$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta]$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ esiste}$$

$$\text{in } (x_0, x_0 + \delta]$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

□

« se conosco $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$ allora

conosciamo (sotto certe ipotesi) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow$

Teo 25, 11.1 (de L'Hopital)

Sia $f, g: [x_0, x_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R}$

continue in $[x_0, x_0 + \delta]$, $f(x_0) = 0, g(x_0) = 0$

derivabili in $(x_0, x_0 + \delta)$, $\frac{g'(x)}{g'(x)} \neq 0$
 $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$

Supp. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ su $(x_0, x_0 + \delta)$
 $\in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$\Rightarrow$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad \text{su } (x_0, x_0 + \delta)$$

oss 25.12.1 il teo 25.11.1 « Va in una

direzione $\Rightarrow$: $x_0 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = x, \quad g'(x) = 1$$

g verifica le ipotesi del teo 25.11.1

$f(0) = 0$ f continua su $[0, +\infty)$
 f derivabile su $(0, +\infty)$ si

Inoltre

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{su } (0, +\infty)$$

Ma $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \bigg|_{\text{su } (0, +\infty)}$ non esiste: Infatti

$$x \neq 0 \quad f'(x) = 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$\text{e } \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) \quad \text{su } (0, +\infty)$$

Dai Prima di tutto, osservo che l'es
di Rolle (24.2.1) vale lo
stesso sotto delle ipotesi leggermente + deboli:

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua
derivabile in (a, b)

$$f(a) = f(b).$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \quad \forall x \in (x_0, x_1]$$

$$= \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

(per il teo di Cauchy), per cui

qualche $c \in (x_0, x_1)$, $c = c(x_0, x_1)$

Supponiamo $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \in \mathbb{R}$,

il caso $\pm \infty$ si fa in modo simile.

« Quando faccio tendere x a x_0 ,
 poiché $c \in (x_0, x)$ anche c
 tende a x_0 . Ma allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = l \Rightarrow$$

⊗ Per essere rigorosi:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$$

$$\Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - l \right| < \varepsilon$$

Ma dato che $c \in (x_0, x)$ ho anche

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1)$$

$$\left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - l \right| < \varepsilon$$

da cui segue la tesi, dato che

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

□