

Lezione 26

27/11/18

14-17

Dim

Es. 23.11.1

a punto di minimo di f in $[a, b]$

$$f(x) \geq f(a) \quad \forall x \in [a, b], \text{ con}$$

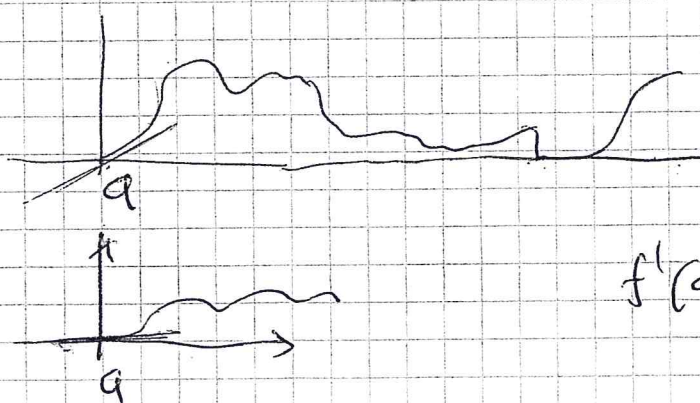
$$f(x) - f(a) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

e dunque

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0 \quad \forall x \in (a, b]$$

Si conosce $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ su $(a, b]$
per ipotesi

ne segue $f'(a) \geq 0$. $\square$



Cor 26.1.1 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$
sia di minimo, Supp. f derivabile in c. Allora

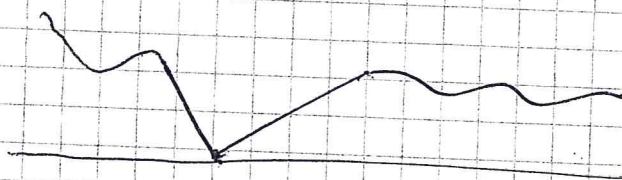
Dim Rapporto in $[a, c]$ (intervallo non banale)³
 e quando f ristretta ad $[a, c]$, $f|_{[a, c]}$,
 c è punto di minimo di $f|_{[a, c]}$
 ed è estremo destro. Dunque dall'es. 23.11.1

$$f'(c) \leq 0.$$

Analogo rapporto in $[c, b]$ (intervallo non banale)
 e quando $f|_{[c, b]}$, c è punto di
 minimo di $f|_{[c, b]}$, ed è estremo sinistro.
 Dunque dall'es. 23.11.1 $\Rightarrow f'(c) \geq 0$.

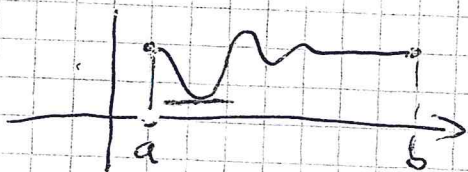
□

Questi risultati nulla affermano in un
 punto di minimo di f dove f non è
 derivabile.

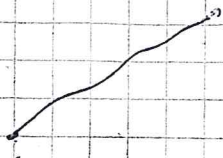


Teo (Rolle) 24.2.1 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 derivabile in $[a, b]$, $f(a) = f(b)$.

Allora $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$



tutte le ipotesi sono necessarie:



Dm f derivabile in $[a, b]$

Lemma 21.20.1

$\Rightarrow f$ continua in $[a, b]$

Teo 19.6.1

$\Rightarrow f([a, b])$ ha max e min.

$$m := \min f([a, b])$$

$$M := \max f([a, b])$$

$\forall$ Sono veri con:

1) $m = M$. Allora $f = \text{costante}$,

$$f(x) = m (= M) \quad \forall x \in [a, b]$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b]$$

2) $m < M$, dunque f non è costante in $[a, b]$
Allora, preso $x_m, x_M \in [a, b]$

tale che $f(x_m) = m$, $f(x_M) = M$, si ha necessariamente

mente $\{x_m, x_M\} \neq \{a, b\}$. Infatti, se

per assurdo esiste un punto d'ultimo di f ,

x_m , e un punto di max di f , x_M ,

$x_m = a$ (oppure b) e $x_M = b$ (oppure a)

$$m = f(x_m) = f(a) \quad \text{if der} \quad f'(x) = f'(b) = M$$

$m = n$, assurdo.

4

7. Dunque 0 , x_m o x_n è interno ad $[a, b]$. Ad esempio, $x_m \in (a, b)$.

Allora $f'(x_m) = 0$ dal Cor. 24.1.1. $\square$

40

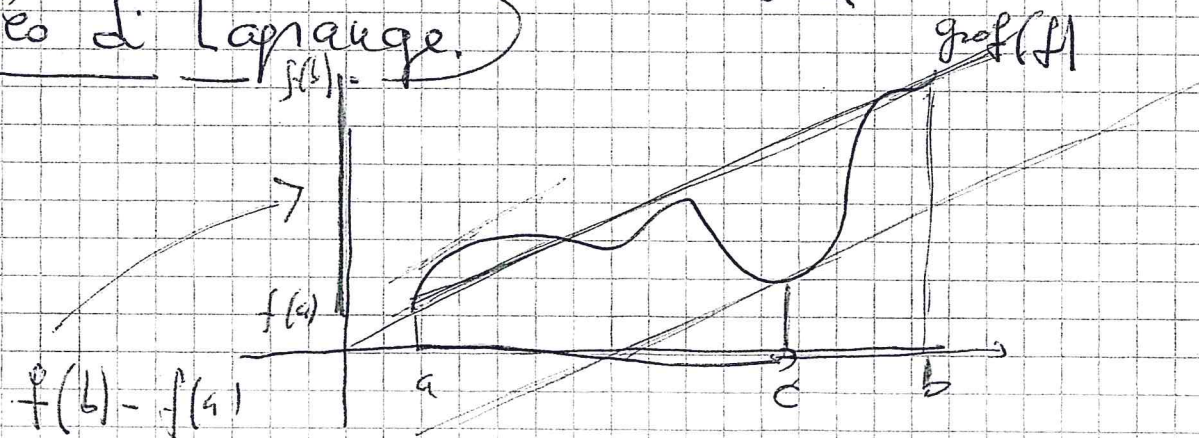
(Cauchy)
Cor 24.4.1. Siano $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
derivabili in $[a, b]$. Allora $\exists c \in (a, b)$;

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

(caso particolare; $g(x) = x$, che dà;

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{detto}$$

Teo di Lagrange.



8. Dim (Cauchy) $F(x) := f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$
 $\forall x \in [a, b]$. Allora F è derivabile in $[a, b]$; inoltre

$$F(a) = f(a)(g(b) - g(a)) - g(a)(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

$$F(b) = f(b)(g(b) - g(a)) - g(b)(f(b) - f(a)) = f(a)g(b) - f(b)g(a)$$

↓

$$F(a) = F(b)$$

Posiamo dunque applicare il teo di Rolle (teo 24.2.1) a F : ne segue

$$\exists c \in (a, b) : F'(c) = 0$$

$$\text{Ma } F'(x) = f'(x)(g(b) - g(a)) - g'(x)(f(b) - f(a)) \quad \forall x \in [a, b].$$

Dunque mettendo c al posto di x si ha

$$0 = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a))$$

L'interesse di questo teorema sta anche nel fatto che viene usato nella formula di Taylor, che servirà specialmente per il calcolo dei limiti.

Es 24.6.1

Per quali $x > 0$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{sui } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{2}}{x^x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \text{sui } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(FORMULA DI TAYLOR CON RESIDUO DI LAGRANGE)

Teo 24.6.1 $\checkmark$ Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,
 f derivabile n -volte in $[a, b]$.

Allora $\exists c \in (a, b)$:

$$f(b) = \left(f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \right) + \frac{f^{(n)}(c)(b-a)^n}{n!} \quad (24.6.1)$$

(1)

Resto di Lagrange

Mostrare

$f^{(n)}$

= derivata n -esima di f

$$\text{e si ha } (f')^{(k)} = f^{(k+1)}$$

oss 24.6.2 se $n=1$ il teo dice $\exists c \in (a, b)$:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

che è il teo di Lagrange

oss 24.6.3 la (24.6.1) vale anche scambiando b con a

La (24.6.1) è valida comunque
siano $a < b$, « vicini o lontani »

« La formula di Taylor con resto di
Peano si interessa al caso $b \rightarrow a$ »

tipiche notazioni:

$$\begin{aligned} a &\rightarrow x_0 \\ b &\rightarrow x \\ x - x_0 &\rightarrow h \end{aligned}$$

$$(24.7.1) \left\{ \begin{aligned} f(x) &= \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x-x_0)^{n-1} \right) \\ &+ \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-x_0)^n, \end{aligned} \right.$$

c tra x_0 e x ,
oppure tra x e x_0

Spero ma non sempre $x_0 = 0$.

Calcoliamo pol. di Taylor di $\sin x$

con $x_0 = 0$

Pol. di Taylor di $\sin x$ centrato in 0 di ordine n :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{\sin^{(4)}(c)}{4!} x^4 \quad \text{è la (24.7.1)}$$

quando $f(x) = \sin x$, ordinata, $x_0 = 0$

$\Rightarrow k \neq 0$ si ha

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{\sin^{(4)}(c)}{4!} x^3$$

$$\frac{\sin x}{x} - 1 = -\frac{x^2}{6} + \frac{\sin^{(4)}(c)}{4!} x^3$$

$$\frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2} = -\frac{1}{6} + \frac{\sin^{(4)}(c)}{4!} x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x^2} = -\frac{1}{6} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$\Rightarrow \alpha = 2$ nell'es. 24.6.1

Dim (teo di Taylor). Per induzione su n .

Per $n=1$ la (24.6.1) è vera, perché è il teo. di Lagrange. Supponiamo

vera la formula per $n-1$ e dimostriamo

valda per n . Applichiamo il teo di

Cauchy (24.4.1) con le due funzioni seguenti:

$$F(x) = f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} \right)$$

$$\text{e } (x-a)^n = G(x)$$

Ricordiamo!

Teo Cauchy $\exists x_1 \in (a, b):$

$$F'(x_1)(G(b)-G(a)) = G'(x_1)(F(b)-F(a))$$

(ho cambiato lettere nel teo di

Cauchy: $f \rightarrow F$

$g \rightarrow G$

$c \rightarrow x_1$); $n \geq 2$

Dunque $\exists x_1 \in (a, b):$

$$\left[f'(x_1) - \left(f'(a) + f''(a)(x_1-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-2)!} (x_1-a)^{n-2} \right) \right]$$

$$(b-a)^n = n(x_1-a)^{n-1} \left[f(b) - \left(f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (b-a)^{n-1} \right) \right]$$

$$\frac{0}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{1}{n} \left[f'(x_1) - \left(f'(a) + f''(a)(x_1-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-2)!} (x_1-a)^{n-2} \right) \right]$$

$$= \frac{(x_1-a)^{n-1}}{(b-a)^n} \left[f(b) - \left(f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (b-a)^{n-1} \right) \right]$$

Devo usare l'ipotesi induttiva?

Pongo $f' =: h$ e derivabile $(n-1)$ volte
in $[a, b]$, e dunque in $[a, x_1]$:

$$\begin{aligned} [\quad] &= h(x_1) - \left(h(a) + h'(a)(x_1-a) + \dots + \frac{h^{(n-2)}(a)}{(n-2)!} (x_1-a)^{n-2} \right) \\ &= \frac{h^{(n-1)}(c)}{(n-1)!} (x_1-a)^{n-1}, \text{ per un qualche } c \in (a, x_1) \end{aligned}$$

↑ ipotesi induttiva

Sostituendo nell'ultima formula della
pag 9 ho:

$$\frac{\frac{1}{n} \frac{f^{(n)}(c) (x_1-a)^{n-1}}{(n-1)!}}{(x_1-a)^{n-1}} = \frac{f(b) - \left(f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a) (b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \right)}{(b-a)^n}$$

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} (b-a)^n = f(b) - \left(f(a) + f'(a)(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a) (b-a)^{n-1}}{(n-1)!} \right)$$

□

ES 26.10.1 Calcolare in modo approssimato
il numero $\sqrt[4]{17}$

ES 26.10.2 Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile in
 $[a, b]$. E $f'(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b]$ allora

f è strettamente crescente in $[a, b]$.

Se invece $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

allora f è crescente in $[a, b]$.

ES 24.11.1. Se f è derivabile in $[a, b]$ ed è strettamente crescente non è necessariamente vero che

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Ma basterà $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$.

ES 24.11.2 Se $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

derivabile in $[a, b]$, $f'(x) = 0$

$\forall x \in [a, b] \Rightarrow f$ è costante in $[a, b]$.

ES 24.11.3

Sviluppo di $\cos x$ intorno a $x_0 = 0$:

$$\cos x = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{\cos(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

ES. 26.12.1

12

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \text{Resto}$$

ES 26.12.2

per quale $x > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\log(1+x) - 1}{x}}{x^\alpha} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\text{su } (-1, +\infty) \setminus \{0\}$$