

Teo (derivazione delle funzioni inverse) 23.1.1

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f([a, b]) = [c, d]$$

$f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ invertibile

Sia $g: [c, d] \rightarrow [a, b]$ l'inversa.

Sia $x_0 \in [a, b]$, f derivabile in x_0 , $f'(x_0) \neq 0$.

Poniamo $y_0 = f(x_0) \in [c, d]$

Supponiamo che g sia continua in y_0 . (*)

Allora g è derivabile in y_0 e si ha

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (23.1.1)$$

Nota: $y_0 = f(x_0) \Rightarrow x_0 = g(y_0)$

Dunque (23.1.1) $\Leftrightarrow$

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

Oss 23.2.1

(*) è necessaria.

Esistono esempi di f con le ipotesi
del teo 23.1.1, in cui g non risulta
continua in y .

3

Dim Definiamo, per $x \in [a, b] \setminus \{x_0\}$,

$$R(x) = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}; \quad \text{oss } x \neq x_0 \downarrow f(x) \neq f(x_0), \text{ dato che } f \text{ è invertibile.}$$

$$R(g(y)) = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}, \quad \text{abb}$$

la funzione $\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0}$ si ottiene

componendo la funzione $\frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}$

$$\text{con } x = g(y)$$

Per ipotesi (*) $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0)$ in $[c, d]$

Allora, dal teo della composizione dei limiti
(Lemma 18.8.1) si ha che

$$\exists \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \quad \text{in } [c, d] \setminus \{y_0\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} \quad \text{in } [a, b] \setminus \{x_0\}$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)}$$

(perché per ipotesi f è
derivabile in x_0 , e $f'(x_0) \neq 0$) $\square$

OSS 23.4.1 [M. S.], pag 183: hanno due ipotesi

f continua strett. crescente : $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f invertibile : $[a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$

$\Rightarrow$ $g = f^{-1}$ continua in $[f(a), f(b)]$

f derivabile in $x_0 \in (a, b)$, $f'(x_0) \neq 0$

— ipotesi in comune
— + forti

[A B], pag 352, lo stesso di MS,

[Grani, An. Mat. di base, to 3, 12] hanno che $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è come il nostro enunciato, ma la dim. usa la derivata della funzione composta.

OSS 23.4.2 Nella dimostrazione non

facciamo uso della derivata della

funzione composta (ma usiamo
limiti di composizione)

Teo 23.4.1 Sia $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$

Sia $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in [a, b]$

f derivabile in x_0 . Poniamo $y_0 = f(x_0)$

Supponiamo g derivabile in y_0 . Allora

$g \circ f$ è derivabile in x_0 , e $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$

Dim. Dobbiamo calcolare, e $\exists$,

$$(23.5.1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad \text{in } [a, b] \setminus \{x_0\}$$

Cioè

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \quad \text{in } [a, b] \setminus \{x_0\}$$

Idea

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se questo fosse possibile si capisce
la ten del teorema. Tutto il problema
della dimostrazione consiste nel
rendere rigorosa questa idea,
e questo non sarà banale.

Potremmo

$$A = \{x \in [a, b] \setminus \{x_0\} : f(x) = f(x_0)\}$$

$$B = \{x \in [a, b] : f(x) \neq f(x_0)\}$$

$$A \cup B = [a, b] \setminus \{x_0\}; \quad A \cap B = \emptyset$$

Dobbiamo dunque calcolare

6

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad \text{su } A \cup B$$

V: Sono 2 cas possibili: $x_0 \notin \bar{A} \cap \bar{B}$, cioè 3 cas possibili:
 $x_0 \in \bar{A} \cap \bar{B}$

1) $x_0 \notin \bar{A}$

2) $x_0 \notin \bar{B}$

3) $x_0 \in \bar{A} \cap \bar{B}$

Nota: se 3) è falsa $x_0 \notin \bar{A} \cap \bar{B}$

$$x_0 \in [a, b] \setminus (\bar{A} \cap \bar{B}), \text{ cioè } x_0 \notin \bar{A}$$

$$\text{oppure } x_0 \notin \bar{B}$$

Cas 1) $x_0 \notin \bar{A} \Rightarrow \exists t > 0 :$

$$A \cap (B_t(x_0) \setminus \{x_0\}) = \emptyset$$

dove $B_t(x_0) = (x_0 - t, x_0 + t)$

$$\Rightarrow B_t(x_0) \setminus \{x_0\} \subseteq B$$

$$\Rightarrow ([a, b] \setminus \{x_0\}) \cap B_t(x_0) = B \cap B_t(x_0)$$

(23,6,1)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad \text{su } [a, b] \setminus \{x_0\}$$

$\parallel \leftarrow$ Lemma 18.3.1 (bedingung)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad \text{in } ([a, b] \setminus \{x_0\}) \cap B_\epsilon(x_0)$$

$\parallel$ (23.6.1)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad \text{su } B \cap B_\epsilon(x_0)$$

Ma $\forall x \in B$ $\ll$ psb finalmente dividendo $f(x) - f(x_0)$

$$\begin{aligned} \text{così} \quad \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{F(x) - F(x_0)}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &\stackrel{\text{def. } \downarrow F}{=} \underbrace{\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}}_{\downarrow g'(y_0)} \cdot \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\substack{\text{per ipotesi} \\ f \text{ è derivabile in } x_0} \downarrow f'(x_0)} \end{aligned}$$

Tco. Composizione limiti

(Lemma 18.8.1), per ipotesi g è derivabile in y_0 .

Segue la tesi, nel caso 1).

Caso 2) Simultaneamente

$$[a, b] \setminus \{x_0\}$$

$$\text{su } A \cup B$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

||

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

$$\text{su } A \cap B_f(x_0)$$

$$\forall x \in A \cap B_f(x_0) \quad \text{ho } f(x) = f(x_0)$$

$$\Rightarrow F(x) - F(x_0) = g(f(x)) - g(f(x_0)) \\ = 0$$

Ne segue che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad \text{su } A \cap B_f(x_0)$$

Per dimostrare la tesi, basta allora vedere che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g'(y_0) = 0 \quad \text{su } A \cap B_f(x_0)$$

$$= 0 \cdot g'(y_0) = 0.$$

Segue la tesi (in questo caso $0=0$)
nel Caso 2).

Reste il caso 3) : devo calcolare

9

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \quad \text{su } A \cup B \quad (23.9.1)$$

quando $x_0 \in \overline{A \cap B}$

Siamo nel caso del Lemma 18.5.1

(con A al posto di E , B al posto di F ,
 x_0 al posto di $\bar{x}$).

Dunque, per il calcolo del limite
nelle (23.9.1), mi basta far vedere
che i limiti fatti in A e, separatamente,
in B , esistono e sono uguali.

Vediamo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad \text{su } A \quad (23.9.2)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad \text{su } B \quad (23.9.3)$$

Nota: [AB, pag 351] usano gli ϵ piccoli,
cosa che vogliamo evitare qui.

La (23.9.2) si dimostra con

nel caso 2). Dimostriamo la (23.9.3):

$$\forall x \in B$$

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Resta da vedere che il limite del
membro destro (su B) fa zero.

Perché f è derivabile in x_0 ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{su B}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{su A}$$

$$= 0$$

Il risultato segue. $\square$

Applicazioni del concetto di derivata:

Def 23.10.1

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

Diciamo che x_0 è un punto di minimo di
 f se

$$\forall x \in E \quad f(x_0) \leq f(x)$$

Minimo qui vuol dire minimo assoluto.
 Per i massimi, $f \rightarrow -f$, si può
 rovesciare la disuguaglianza.

Def 23.11.1 $x_0 \in E$ ^{dice} si ∇ di minimo
 locale di f se

$$\exists \rho > 0 : \forall x \in E \cap B_\rho(x_0) \quad f(x_0) \leq f(x)$$

Nota x_0 minimo di $f \Rightarrow x_0$ minimo locale
 di f

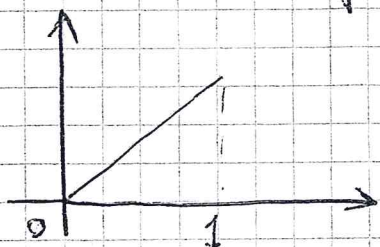
ma il viceversa non è necessariamente
 vero.

Es 23.11.1. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

f derivabile in a , e notiamo
 che a è punto di minimo di f .

Allora

$$f'(a) \geq 0$$



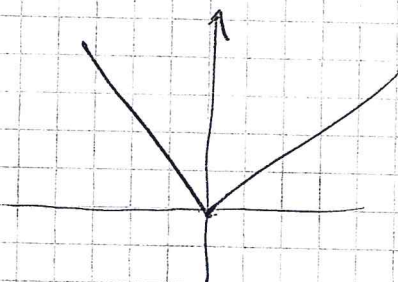
$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$$

Esempio di funzione Lipschitziana:

$$\exists K > 0 : \forall x, y \in \text{dom}(f)$$

$$(23.12.1) \quad |f(x) - f(y)| \leq K |x - y|$$

$$f(x) = |x|$$



f non è deriv. in $x=0$, ma $f \in \text{Lip}(\mathbb{R})$
con $K=1$

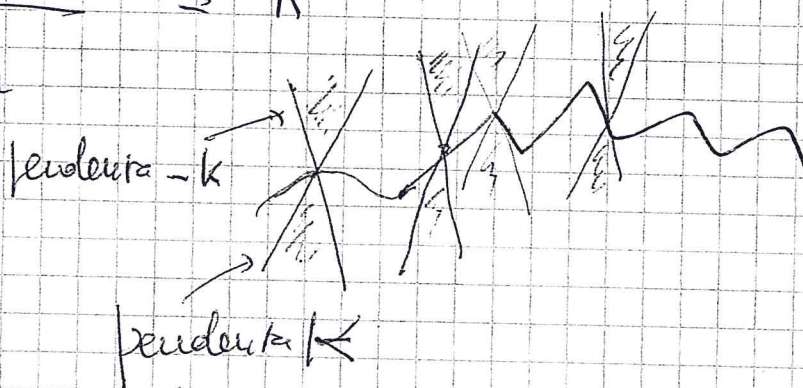
$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad (\text{la cosa})$$

W e viceversa, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

f è derivabile in $\mathbb{R}$, ma $f \notin \text{Lip}(\mathbb{R})$.

prendiamo in (23.12.1) $x \neq y$

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq K$$



Zone rosse: non attraversate da graf(f)