

Continuiamo con le funzioni monotone:

Riguardo che le successioni monotone ammettono sempre limite. Vale un analogo

per le funzioni monotone. Enunciamo

un lemma al riguardo, supponendo (21.1.1)

certi estremi superiori finiti, gli altri casi sono simili.

Teo 21.1.1. Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Supponiamo

$$\sup E < +\infty$$

(21.1.1)

$$\sup f(E) < +\infty$$

f monotona crescente

$$s = \sup E \notin E$$

(21.1.2)

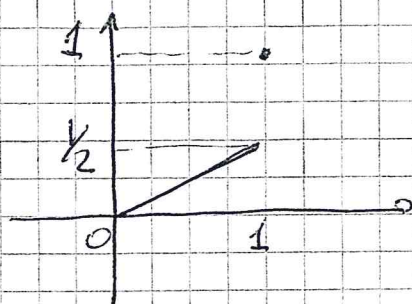
Allora

$$\exists \lim_{x \rightarrow s} f(x) \quad \text{su } E$$

ed è uguale a $\sup f(E) = \sup \{f(x) : x \in E\}$

oss 21.1.1. Se non suppongo (21.1.2) il risultato può essere falso: se $s \in E$

possiamo considerare:



$E = [0, 1]$, $s = 1$, f come in figura

~~$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ su E~~

$$\sup f(E) = 1.$$

osserviamo anche che $s \in \bar{E}$ (per caso)

Dim Sia $\lambda := \sup f(E) < +\infty$. Allora

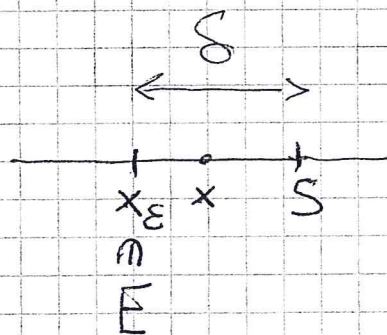
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in E : f(x_\varepsilon) > \lambda - \varepsilon \quad (21.2.1)$$

Da $x_\varepsilon \in E$, $s \notin E$, $\left(\begin{smallmatrix} s < +\infty, \\ s \end{smallmatrix} \right)$ deduco $0 < s - x_\varepsilon =: \delta$

Dato $\varepsilon > 0$ ho definito $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$.

Adesso, sia $x \in E$ tale $|x - s| < \delta$

f



$$f(x) \geq f(x_\varepsilon)$$

perché f crescente e $x > x_\varepsilon$

Ricapitolando

3

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E,$$

$$|x - s| < \delta \implies f(x) \geq f(x_\varepsilon)$$

$$\begin{array}{c} \text{Ma} \\ \lambda + \varepsilon \geq \lambda \geq f(x) \geq \lambda - \varepsilon \\ \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ \lambda = \sup f(E) \quad (21.2.1) \end{array}$$

Dimostrare

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E, |x - s| < \delta$$

$$\implies |f(x) - \lambda| < \varepsilon.$$

Questo è la caratterizzazione $\lambda = \lim_{x \rightarrow s} f(x)$

su E (vedi Lemma 16.3.1)

□

Ricordo : se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$(21.3.1) \left\{ \begin{array}{ll} \forall t \in [a, b] & \lim_{x \rightarrow t^+} f(x) := \lim_{x \rightarrow t} f(x) \text{ su } (t, b] \\ \forall t \in (a, b] & \lim_{x \rightarrow t^-} f(x) := \lim_{x \rightarrow t} f(x) \text{ su } [a, t) \end{array} \right.$$

Il seguente esercizio è in parte conseguenza della (21.3.1) e del Teo 21.1.1.

ES 21.4.1 Sia $f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}$

monotona crescente. Allora

$$\forall \bar{x} \in (a,b) \quad \exists \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) \in \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) \in \mathbb{R}$$

e

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x)$$

Posto

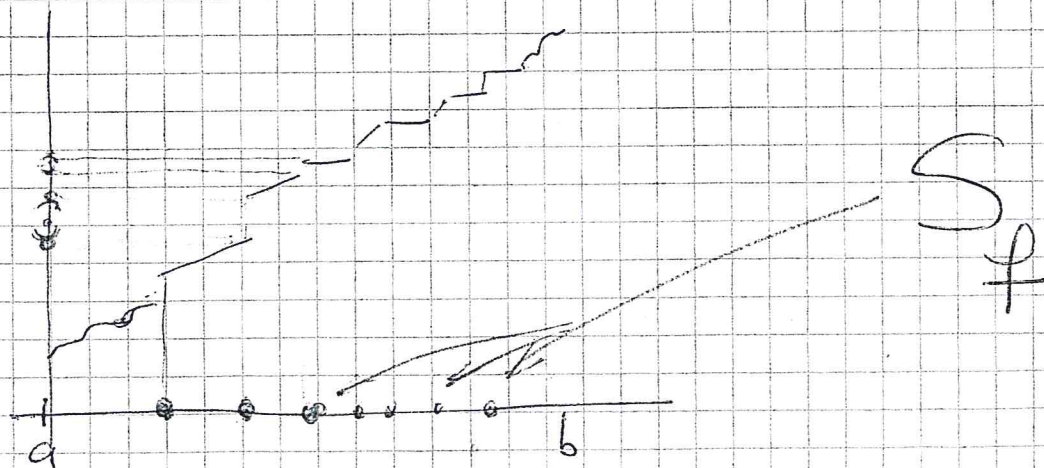
$$S_f = \left\{ x \in (a,b) : \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) \right\}$$

allora

S_f è al più numerabile (21.4.1)

e

$\forall x \in (a,b) \setminus S_f$, f è continua in x .



$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ si dice numerabile se

$\exists \varphi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ iniettiva
e surgettiva.

Idea per la (21.4.1): associa a
ciascun $\bar{x} \in S_f$ l'intervallo

$$\phi \neq I_{\bar{x}} = \left\{ y \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x) < y < \lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) \right\}$$

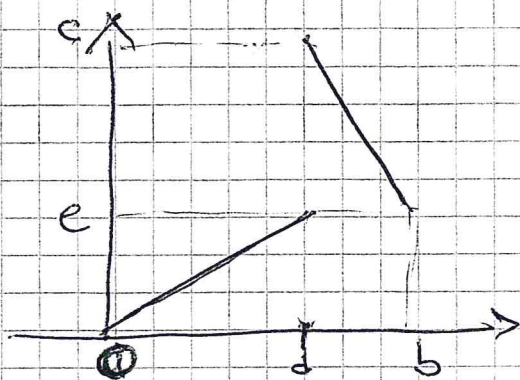
$$\bar{x} \neq \bar{y}, \bar{x}, \bar{y} \in S_f \Rightarrow I_{\bar{x}} \cap I_{\bar{y}} = \emptyset$$

E prendo un razionale in ciascun $I_{\bar{x}}$
... formalizzare a casa.

Teo 21.5.1 (Caratterizz. delle funzioni
monotone). Sia $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$
monoton^{crescente}a, e supponiamo che f
assuma tutti i valori compresi tra
 $f(a)$ e $f(b)$. Allora f è
continua.

(Se f decrescente è analogo).

OS 21.6.1 Se f non è monotona,
in generale il risultato è falso,



$$f(d) = e$$

$$f(b) = c$$

$$f: [a, b] \rightarrow [0, c]$$

f iniettiva, surgettiva (dunque

f è bigettiva)

f assume tutti i valori compresi

tra $f(a)$ e $f(b)$

f non è monotona

f non è continua.

Dm Per quanto visto sui limiti, basta
dimostrare

$$(21.6.1) \quad \forall t \in (a, b]$$

$$f(t) = \lim_{x \rightarrow t^-} f(x)$$

$$(21.6.2) \quad \forall t \in [a, b)$$

$$f(t) = \lim_{x \rightarrow t^+} f(x)$$

Dimostriamo (21.6.1), la (21.6.2) essendo
 simile. Sia $t \in (a, b]$, ricorrendo che

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow t} f(x) \text{ su } [a, t)$$

Ma

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) = \sup_{a \leq x < t} f(x)$$

per 21.1.1

(prendo $E = [a, t)$)

Dato che f è crescente

$$\forall x \in [a, t) \text{ ho } f(x) \leq f(t)$$

Passando al sup su tali x deduco

$$\sup_{x \in [a, t)} f(x) \leq f(t)$$

Il che dunque per ora

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) \leq f(t)$$

Supponiamo per assurdo che

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) < f(t)$$

Scego $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow t^-} f(x) < \lambda < f(t) \quad (21.8.1)$$

osservo che, essendo f crescente,

$$f(a) \leq \lim_{x \rightarrow t^-} f(x)$$

$$f(x) \geq f(t),$$

$$\text{dunque} \quad f(a) < \lambda < f(b)$$

Per dimostrare l'assunto, basta vedere che λ non è un valore assunto da f . Vediamo che succede in gli $x \in [a, t)$: f crescente

$$\Rightarrow f(x) \leq \sup_{x \in [a, t)} f = \lim_{x \rightarrow t^-} f(x) < \lambda$$

Dunque $\forall x \in [a, t)$, $f(x)$ non può essere $= \lambda$, perché ho appena visto che $f(x) < \lambda$.

Inoltre se $x \in [t, b]$, poiché f

f è crescente

19

$$f(x) \geq f(t) > \lambda$$

(21.8.1)

Dunque λ non è assunto di f
valore

in $x \in [a, b]$.

In definitiva, λ non è un valore
assunto da f , nonostante

$$\lambda \in (f(a), f(b)), \quad \text{assunto.}$$

□

Teo 21.9.1 (per cosa, facile conseguenza
del teo ^(19.12.1) dei valori intermedi)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua
e invertibile. Allora f è o stretta
mente crescente, o strettamente
decrescente)

Dia (início)

f inietora $f(a) \neq f(b)$

Podemos supor $f(a) < f(b)$, o outro caso sendo similar.

Seja $x_1 \in (a, b)$; necessariamente

$$f(x_1) \neq f(a), \quad f(x_1) \neq f(b)$$

Visto isso há 3 possibilidades:

1) $f(x_1) < f(a)$

2) $f(x_1) > f(b)$

3) $f(a) < f(x_1) < f(b)$

Vedamos que 1) não é possível:

se $f(x_1) < f(a)$, considero

$$\hat{f} := f|_{[x_1, b]}$$

$\hat{f}$ é contínua

$$\hat{f}(x_1) < f(a)$$

$$\hat{f}(b) > f(a)$$

$$\parallel \\ f(b)$$

Dal teo dei valori intermedi (Teo 19.12.1)¹¹

• esiste $z \in (x_1, b)$: $\hat{f}(z) = f(a)$

Ma $\hat{f}(z) = f(z)$, dunque

$$f(z) = f(a)$$

assunto luchi $z > a$, e f è inettiva.

• Analogamente si dimostra che 2)
non si può verificare.

Dunque $\forall x_1 \in (a, b)$ si ha

$$f(a) < f(x_1) < f(b).$$

Questo è quasi la tesi: vi
resta da dimostrare che

$$\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Tco 21.12.1 (Regolarità della funzione
inversa)

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua
e invertibile. Sia f^{-1} l'inversa di f .
Allora f^{-1} è continua.

Dim Conseguenza di tutto quello visto
fino ad ora:

f continua invertibile $\xRightarrow{\text{Tco 21.9.1}}$ f o strett.
crescente o strett. decrescente.

Supponiamo f strett. crescente, l'altro
caso si fa in modo simile.

$f(a)$ è il minimo dei valori di f
 $f(b)$ è il massimo dei valori di f

$$f: [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$$

e tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$

f assume

grazie al Tco. 19.12.1
dei valori intermedi

Dunque $f^{-1}: [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$

È facile verificare che f^{-1} è strettamente crescente (in casa).

Dato che f^{-1} assume tutti i valori compresi tra a e b , dal teo. 21.5.1 segue che f^{-1} è continua.

□

Questo conclude la parte sui risultati relativi alle funzioni definite su un intervallo alle continuità.

CONTINUITÀ UNIFORME E LIPSCHITZIANITÀ

Def ^{21.13.1} Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice (e si scrive $f \in UC(E)$) che f è uniformemente continua su E , se $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x, y \in E, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

ES ^{21.13.1} f unif. continua su E
 $\Rightarrow f$ continua su E .

f continua in E vuol dire:

$$\forall x \in E \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0;$$

$$\forall y \in E, \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

f unif. continua in E vuol dire:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0; \quad \forall x, y \in E$$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

ES 24.14.1

Esempio funzione continua

da $(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ non unif. continua
su $(0, 1)$.

« unif. continua per di δ si può
scegliere uniforme ^(rispetto) a X »

Teo 21.14.1 (per cosa). Sia

$K \subset \mathbb{R}$ compatto

$f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Allora f è unif. continua su K .

(Teo HEINE - CANTOR, serve per gli integrali)

Def 21.15.1 Sia $f: E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Si dice che f è Lipschitziana su E e si scrive $f \in \text{Lip}(E)$, se

$$\exists K \geq 0 : \forall x, y \in E$$

$$|f(x) - f(y)| \leq K |x - y|$$

Equivalentemente

$$\text{dist}(f(x), f(y)) \leq K \text{dist}(x, y).$$

ES 21.15.1

$$f \in \text{Lip}(E) \Rightarrow f \in \text{UC}(E)$$

e il viceversa in generale è falso.

21.15.2

DERIVABILITÀ PER FUNZIONI DEFINITE SU INTERVALLI.

Cominciamo con $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
gli altri casi sono simili.

Def 21.16.1. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x_0 \in [a, b]$. Si dice che f
è derivabile in x_0 se

$$\left(\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R} \right)_{\substack{\text{su } [a, b] \setminus \{x_0\} \\ (21.16.1)}}$$

oss 21.16.1 Se $x_0 = a$ faremo elemento

il limite destro del rapporto incrementale

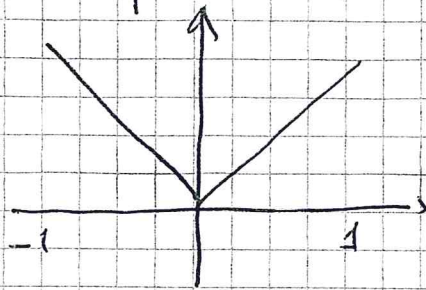
$$\text{tale } \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Se $x_0 = b$ faremo elemento il limite
sinistro del rapporto incrementale.

Vediamo un esempio di $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
in cui tale limite non esiste:

ES 21.16.1 $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{dist}(x, 0) = |x|$

In generale, un punto in cui voglio definire la derivata di f deve essere nel dominio di f . ¹⁷



$$f \in L.p([-1, 1]) \quad (K=1)$$

In particolare $f \in UC([-1, 1])$ (ES 21.13.1)
 $\Rightarrow f$ è continua su $[-1, 1]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = 1 \quad \text{su } (0, 1]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = -1 \quad \text{su } [-1, 0)$$

Dunque f non è derivabile in $x_0 = 0$.

Questo è un esempio di funzione continua

nel suo dominio, dunque continua in tutti i punti del suo dominio (in def.)
 ma non derivabile in un punto del suo dominio.

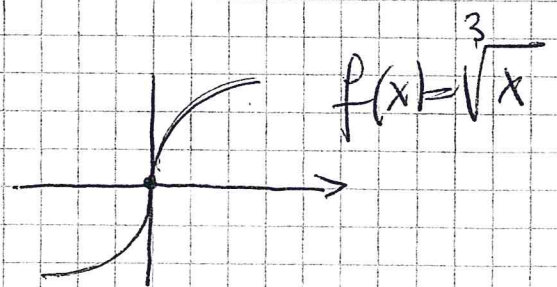
ES 21.17.1

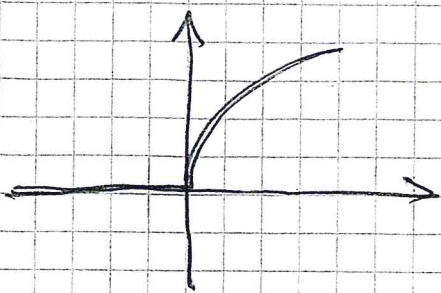
$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0}$$

su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

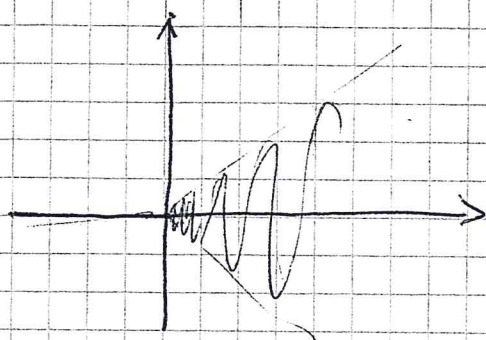
$+\infty \notin \mathbb{R} \Rightarrow f$ non deriv.





$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$



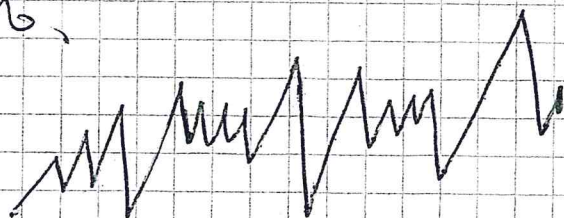
$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x > 0: \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \frac{f(x)}{x} \\ &= \frac{x \operatorname{sen} \frac{1}{x}}{x} = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Tutti esempi di funzioni continue in cui si perde la derivabilità in un punto.



Il limite in (21.16.1), quando esiste finito, si chiama derivata di f in x_0 , e si indica con $f'(x_0)$, $\dot{f}(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$

Se f è derivabile in ogni $x \in \text{dom}(f)$ abbiamo

$$x \in \text{dom}(f) \longrightarrow f'(x) \in \mathbb{R}$$

Che si chiama la derivata di f

Più in generale,

$$\text{dom}(f') = \{x \in \text{dom}(f) : \exists f'(x) \in \mathbb{R}\}$$

= punti del dominio di f dove

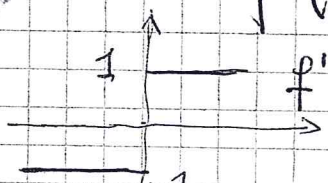
f è derivabile.

ES 21.19.1

Se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$,

$$\text{dom}(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$f'(x) = \begin{cases} +1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



Def 21.20.1

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo

2

$$\mathcal{C}(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continua}\}$$

$$\mathcal{C}^1(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}(I), f' \in \mathcal{C}(I)\}$$

$$\mathcal{C}^2(I) = \{f \in \mathcal{C}^1(I): f' \in \mathcal{C}^1(I)\}$$

e.c.

ES 21.20.1 (difficile).

Esiste una funzione $f: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile, ma $f \notin \mathcal{C}^1((-1,1))$.

Lemma 21.20.1 $\sqrt{\text{Sia } x_0 \in (a,b), \text{ Sia } f: (a,b) \rightarrow \mathbb{R}}$
derivabile in x_0 . Allora f

è continua in x_0 .

Dim $\sqrt{\text{Vogliamo dimostrare che } f \text{ è continua in } x_0, \text{ cioè}}$
(vedi (19.21)) $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \text{ su } (a,b) \setminus \{x_0\}$

equivalente a

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \text{ su } (a,b) \setminus \{x_0\}.$$

$\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ salvo

21

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

Donque dato da f è derivabile
in x_0 ho

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) = 0$$

in $(a, b) \setminus \{x_0\}$. Donque

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0 \text{ in } (a, b) \setminus \{x_0\}$$

□