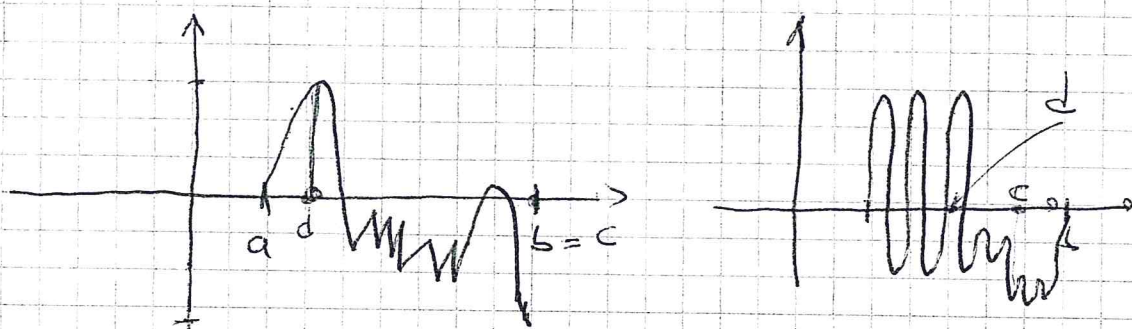


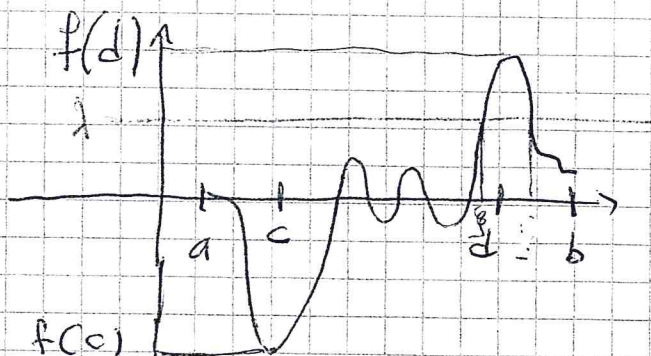
Dim (teo 19.12.1) Dal teo di Weierstrass
(teo 19.6.1) $\exists c \in [a, b] \quad \exists d \in [a, b] :$

$$f(c) = \min f([a, b]) = \min \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

$$f(d) = \max f([a, b]) = \max \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$



Posso supporre, senza perdita di generalità
 $c \leq d$ (il caso $d \leq c$ si tratta
in modo simile)



Due casi sono possibili: $f(c) = f(d)$, $f(c) < f(d)$

$f(c) = f(d) \Rightarrow f = \text{costante} \Rightarrow$ non c'è niente

da dire. Supponiamo dunque $f(c) < f(d)$

$\Rightarrow a \leq c < d \leq b$. Dobbiamo dimostrare che

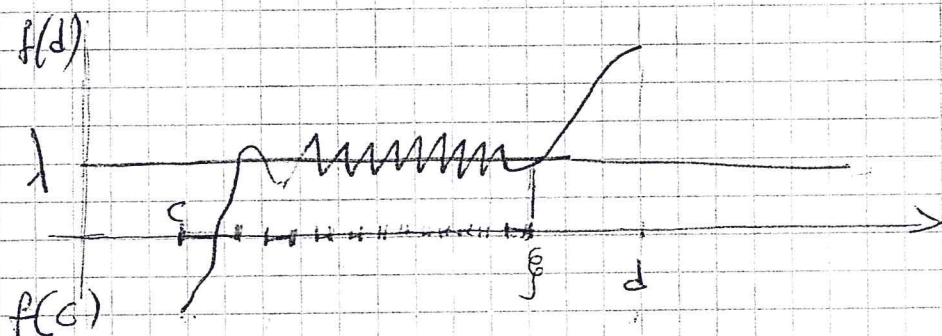
$$\forall \lambda \in (f(c), f(d)) \quad \exists \xi \in (c, d)$$

$$\text{tale che } f(\xi) = \lambda.$$

Cioè

$$\forall \lambda : \quad f(c) < \lambda < f(d) \quad \exists \xi : \quad c < \xi < d$$

$$\text{tale che } f(\xi) = \lambda$$



$$E_\lambda := \{x \in [c, d] : f(x) < \lambda\} \quad \text{sottolivello } \lambda \text{ aperto di } f$$

$$\xi := \sup E_\lambda$$

ξ è ben definito? Sì se $E_\lambda \neq \emptyset$

Ma $E_\lambda \neq \emptyset$ dato che $c \in E_\lambda$. Inoltre

$$E_\lambda \subseteq [c, d] \Rightarrow E_\lambda \text{ è limitato.}$$

$\Rightarrow \xi \in \mathbb{R}$. Voglio dim. che

$$f(\xi) = \lambda$$

Basta dim. $f(\xi) \leq \lambda$, $f(\xi) \geq \lambda$

Dalla def. di estremo superiore (finito) 13

Segue

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in E_\lambda : \xi \geq x_n > \xi - \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in [c, d] \quad f(x_n) < \lambda, \quad \xi \geq x_n > \xi - \frac{1}{n}.$$

Dunque $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \xi$. Dato che $f(x_n) < \lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$

passando al $\lim_{n \rightarrow +\infty}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\xi) \leq \lambda \quad (20.3.1)$$

↑
Vero dato che f è continua in $[a, b]$

(in particolare f è continua in ξ)

Resta da dim. $f(\xi) \geq \lambda$

Dico che $\xi < d$. In fatti

$$f(\xi) \leq \lambda < f(d)$$

↑
(20.3.1)

↑
ipotesi

$$\Rightarrow f(\xi) < f(d) \Rightarrow \xi \text{ non può essere } = d$$

Dunque $\xi < d$.

Dunque $(\xi, d] \neq \emptyset$. Dato che
 f è continua in ξ ho

$$(2.4.1) \quad \lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi) \quad \text{in } (\xi, d]$$

dal lemma 18.1.1 (restituisce).

$$x \in (\xi, d] \Rightarrow x \notin E_\lambda \Rightarrow f(x) \geq \lambda$$

Passando al limite in questa diseg.

$$\text{in } x \rightarrow \xi \text{ in } (\xi, d] \text{ ho}$$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = f(\xi) \geq \lambda$$

□

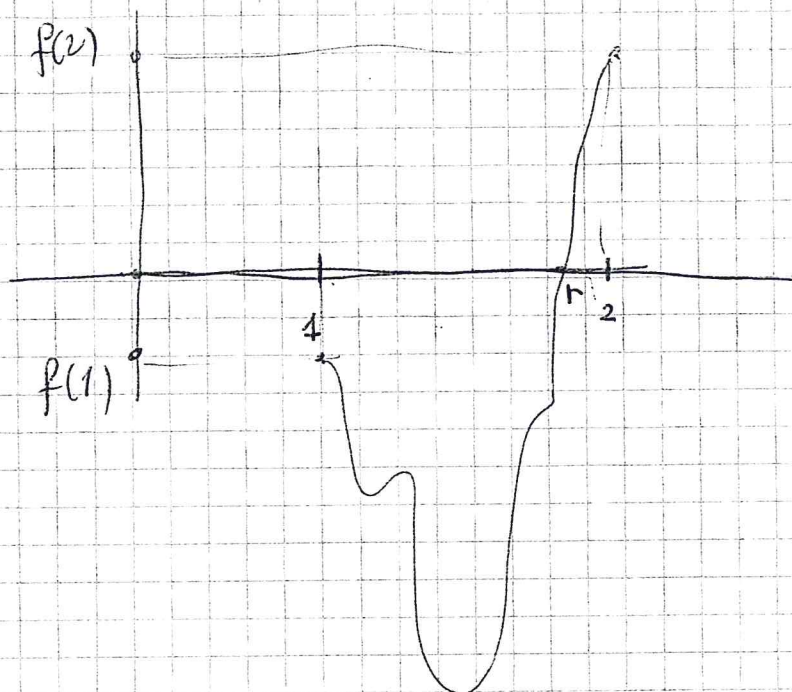
ES (casa) 20.4.1 (Ricerca di soluzioni
approssimate di equazioni). Calcolare
una ^(reale) soluzione approssimate dell'equa-
zione $X^5 + X - 7 = 0$ a meno

di un errore di $\frac{1}{10}$.

Poniamo $f(x) = x^5 + x - 7$ f continua in $\mathbb{R}$.

$$f(1) = -5 < 0$$

$$f(2) > 0$$



$$f(1)f(2) < 0$$

$$\exists r \in (1, 2) : f(r) = 0$$

« f continua manda compatti in compatti, anzi
 manda intervalli ^{chiusi e limitati} in intervalli ^{chiusi e limitati} »

Def 20.6.1 (funzione monotona)

$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

monotona crescente (o non decrescente) se

$$\forall x, y \in E, x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

si dice monotona strettamente crescente e

$$\forall x, y \in E, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

f si dice monotona decrescente (o non crescente)
 e $-f$ è " crescente

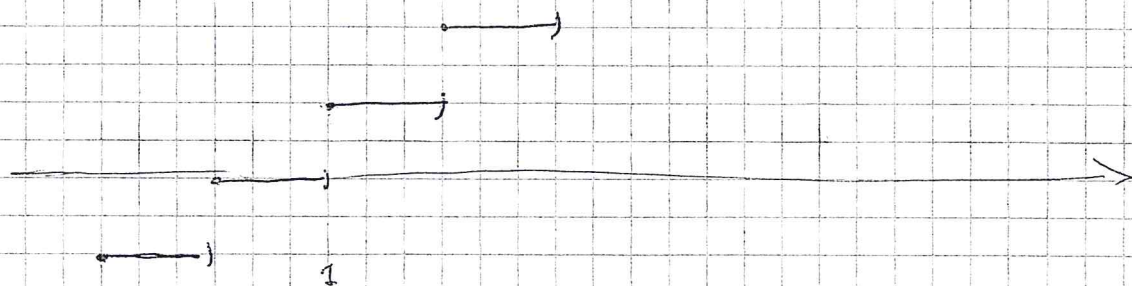
f si dice monotona strettamente decrescente
 e $-f$ è " " crescente

Se non c'è ambiguità, la parola monotona
 verrà qualche volta omessa.

f si dice monotona e è o " " " " " " " "
 crescente o decrescente

ES 20.7.1

$$f(x) = \lfloor x \rfloor = [x]$$



f è monotonica crescente, con $\mathbb{Z}$ come insieme di punti di discontinuità,

$$z \in \mathbb{Z} \quad \nexists \lim_{x \rightarrow z} f(x) \text{ su } \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow z} f(x) = z \quad \text{su } (z, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow z} f(x) = z - 1 \quad \text{su } (-\infty, z)$$

Def 20.7.1

$$f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

I intervallo, Sia $z \in \overset{\circ}{I}$

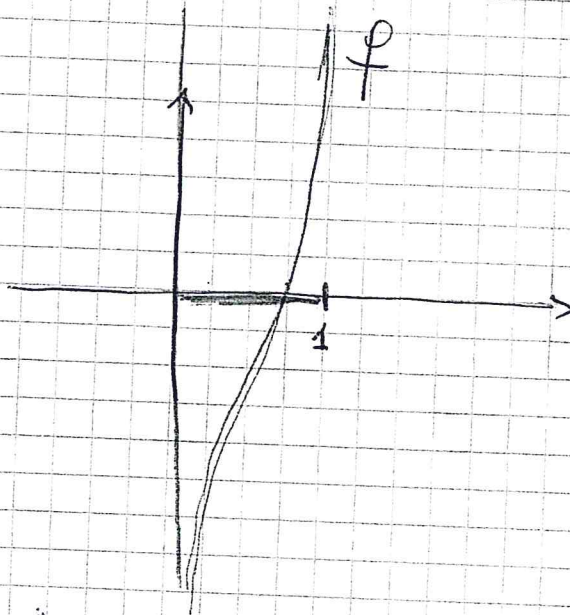
$$\lim_{x \rightarrow z^+} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow z} f(x) \text{ su } (z, \sup I)$$

$$\lim_{x \rightarrow z^-} f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow z} f(x) \text{ su } (\inf I, z)$$

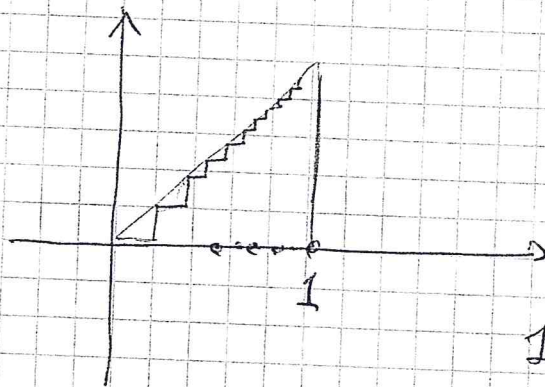
Vedremo che le funzioni monotone ammettono sempre limiti destro e sinistro finiti in un

Posso immaginare f crescente in $(0,1)$ con
infiniti salti.

$$L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

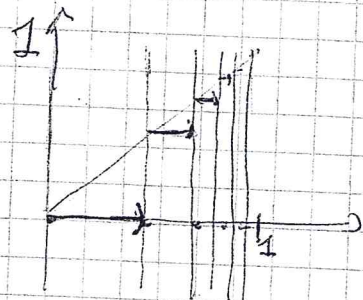


$$L \circ f : (0,1) \rightarrow \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$



$$x_n = 1 - \frac{1}{n} \rightarrow 1$$

e gli
tutti vgl x_n sono di
discontinuità di f



(fuori programma)
Es 20.9.1

Esiste una funzione limitata

la scelta di una crescente $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

che ~~è discontinua~~ solo in $\mathbb{Q} \cap [0,1]$

(anzi, dato un qualunque $N \subset \mathbb{R}$

numerabile, si può costruire una

funzione scelta crescente limitata

discontinua solo su N)

—————→

Come si fa? I razionali ^{di $[0,1]$} sono
numerabili, li mettiamo in un
qualche modo, $q_1, q_2, q_3, \dots$

Definisco $\forall x \in [0,1]$

$$f(x) = \sum_{\substack{i \in \mathbb{N}: \\ q_i < x}} \frac{1}{2^i}$$