

Lezione 1 2/10/18 14-17

G. GILARDI «ANALISI 1», MC-GRAW-HILL

E. ACERBI, G. BUTTAZZO «Primo Corso di Analisi

① Matematica» PITAGORA ED.

① CECCONI, STAMPACCHIA $\left\{ \begin{array}{l} \text{An. 1 Funzioni} \\ \text{di 1 variabile} \\ \text{ESERCIZI (Riethm)} \end{array} \right.$

NOTAZIONE

 $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ numeri naturali① $\mathbb{N} \cup \{0\}$ naturali con lo zero① $\mathbb{Z}$ INTERI = $\{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ① $\mathbb{Q}$ = RAZIONALI = $\left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, (p, q) = 1 \right\}$ con p e q primi fra loro $\mathbb{R}$ NUMERI REALICominciamo con lo studio di $\mathbb{N}$
(è un insieme infinito)

Su $\mathbb{N}$ abbiamo $<$ (semiordinamento)²

$(x, y, z \in \mathbb{N})$

$$\text{Se } x < y \text{ e } y < z \Rightarrow x < z$$

(proprietà transitiva di $<$)

Non è mai vero $x < x$

Non è mai vero $x < y \Rightarrow y < x$

Abbiamo anche $\leq$ (ordinamento)

$x \leq y$ vuol dire o $x < y$ o $x = y$
(reflessività)

Vale $x \leq x$; $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

$x \leq y$, $y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimmetria)

Oltre alle queste relazioni, $\mathbb{N}$
ha altre notevoli proprietà:

Dati $x, y \in \mathbb{N}$ si ha

$$x \leq y \text{ oppure } y \leq x$$

(«tutti gli elementi di $\mathbb{N}$ sono tra loro confrontabili»)

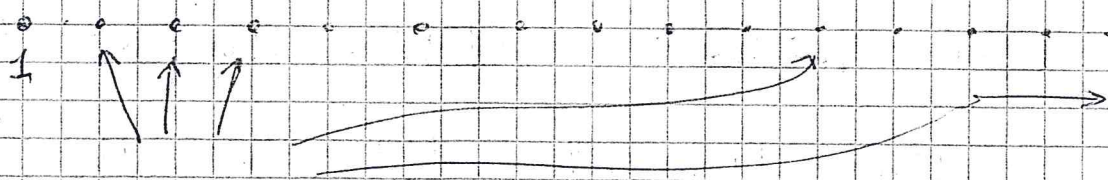
Si dice che l'ordinamento $\leq$ è totale.

Non sempre gli elementi di un insieme ³
sono computabili: Come dire ad esempio

che un punto di $\mathbb{R}^2$ è $\geq$ di un altro
punto del piano?

Proprietà del buon ordinamento:

Se $E \subseteq \mathbb{N}$, $E \neq \emptyset$
allora E ammette minimo
elemento unico.



$$E = \{2, 3, 4, 11, 13, 14, \dots\}$$

Def 1.3.1 Sia $E \subseteq \mathbb{N}$, $E \neq \emptyset$.

$m \in \mathbb{N}$ si dice minimo di E

1) $m \leq e \quad \forall e \in E$

2) $m \in E$

$\mathbb{N}$ con $\leq$ si dice BENE ORDINATO. ✓

$\mathbb{Z}$ con $\leq$ non è BENE ORDINATO

$\mathbb{Q}$ con $\leq$ " " " "

$\mathbb{R}$ con $\leq$ " " " "

$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z}$ non ammette un unico elemento

$$E = \{ n \in \mathbb{Z} : -n \in \mathbb{N} \}$$

ES 1.4.1 m è unico.

Si parla dunque del minimo di E .

Altre proprietà interessanti di $\mathbb{N}$:

ogni $n \in \mathbb{N}$ ha un unico successore

ogni $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ è successore di un unico elemento di $\mathbb{N}$

una proprietà notevolissima di $\mathbb{N}$ è il principio di induzione.

Teo 1.5.1 Sia $T \subseteq \mathbb{N}$ tale che:

$$1) \quad 1 \in T$$

$$2) \quad n \in T \Rightarrow n+1 \in T$$

Allora $T = \mathbb{N}$.

• Dim Per assurdo: $\mathbb{N} \setminus T \neq \emptyset$

• Prendo (grazie al fatto che $\mathbb{N}$ è bene ordinato) $m := \min(\mathbb{N} \setminus T)$.

$m \in \mathbb{N} \setminus T$ cioè $m \notin T$. Da 1)

deduco $m > 1$. Dunque $m = k+1$

con $k \in \mathbb{N}$. Dove sta k ? $k \notin \mathbb{N} \setminus T$

• perché $k < m$ e $m = \min(\mathbb{N} \setminus T)$

• Dunque $k \in T$. Dalla 2) segue $k+1 \in T$

Ma $k+1 = m$, dunque $m \in T$. Assurdo. $\square$

Teo 1.5.2 (generalizzazione di Teo 1.5.1)

Sia $h \in \mathbb{N}$. Supponiamo $T \subseteq \{h, h+1, h+2, \dots\}$

$$1) \quad h \in T$$

$$2) \quad n \in T \Rightarrow n+1 \in T$$

Allora $T = \{h, h+1, h+2, \dots\}$.

Dim: per Cora.

ESERCIZI 1.6.1

$$(i) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(ii) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(iii) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{j=1}^n j^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

(iv) Cercare una formula per

$$\sum_{j=1}^n j^4$$

$$(v) \quad \text{Detto } S_n^k = \sum_{j=1}^n j^k,$$

trovare una formula ricorsiva

che lega S_n^k con S_n^l con $l < k$.

$$(vi) \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

$$(v_{1/2}) \quad \sum_{j=0}^n (2j+1) = (n+1)^2$$

7

« la somma dei primi n numeri dispari è un quadrato perfetto (e viceversa) »

$$(1) \quad T = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} \right\}$$

$T \subseteq \mathbb{N}$? Sì

$1 \in T$? $1 = \frac{1}{2}$ Sì

Se dimostro che $n \in T \Rightarrow n+1 \in T$

Allora dal Teo 1.5.1 segue $T = \mathbb{N}$

$$\text{cioè } \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$$

Devo vedere che se

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{ipotesi})$$

$$\text{allora } \sum_{j=1}^{n+1} j = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad (\text{tesi})$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} j = \sum_{j=1}^n j + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

↑
dall'ipotesi induttiva

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

□

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$n=1: \quad 1^2 = 1 \quad \text{Sì}$$

Supponiamo

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

terzo dim.

$$\sum_{j=1}^{n+1} j^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} j^2 = \sum_{j=1}^n j^2 + (n+1)^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

↑
ipotesi induttiva

$$= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)}{6} [2n^2 + 7n + 6]$$

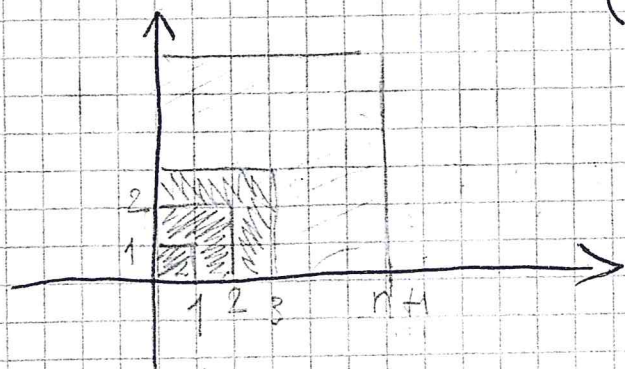
$$[\dots] \stackrel{?}{=} (n+2)(2n+3) \quad \text{SI} \quad \square$$

(iii) PER CASA

(iv), (v) TENTARE

$$(v_k): \sum_{j=0}^n (2j+1) = 1+3+5+\dots 2n+1$$

$$= (n+1)^2$$



$$\sum_{j=0}^2 (2j+1) = 1+3+5 = 9 = 3^2$$

Rifacciamo (ii), in altro modo
che potrebbe suggerire come fare (i5)

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(x+1)^3 - x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - x^3$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$n=3, \quad a=x, \quad b=1$$

$$(x+1)^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} x^k = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

$$(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ (n-1)^3 - (n-2)^3 = 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1 \\ \vdots \\ 3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1 \\ 2^3 - 1^3 = 3 + 3 + 1 \end{array} \right.$$

$$n^3 - 1 = 3 \sum_{j=1}^{n-1} j^2 + 3 \sum_{j=1}^{n-1} j + (n-1)$$

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \dots$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{n^3 - 1 - 3 \sum_{j=1}^{n-1} j - (n-1)}{3}$$

$$\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{(n+1)^3 - 1 - \frac{3}{2}n(n+1) - n}{3}$$

$$\stackrel{\text{CASE}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Idea per esercizio (15):

12

$$(x+1)^5 - x^5 = \cancel{x^5} + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 - \cancel{x^5}$$

$$(n+1)^5 - n^5 = 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1$$

$$n^5 - (n-1)^5 = 5(n-1)^4 + 10(n-1)^3 + 10(n-1)^2 + 5(n-1) + 1$$

$$2^5 - 1^5 = 5 + 10 + 10 + 5 + 1$$

$$(n+1)^5 - 1 = 5 \sum_{j=1}^n j^4 + 10 \sum_{j=1}^n j^3 + 10 \sum_{j=1}^n j^2 + 5 \sum_{j=1}^n j + n$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n j^4 = \frac{1}{5} \left((n+1)^5 - 1 - 10 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \right.$$

$$\left. - \frac{10 n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{5(n+1)n}{2} - n \right)$$

L'ultima formula scritta in modo¹³
più compatto:

$$S_n^4 = \frac{1}{5} \left((n+1)^5 - 1 - 10 S_n^3 - 10 S_n^2 - 5 S_n^1 - n \right)$$

base per esercizio (v).....

ES 1.13.1 Disuguagliante di Bernoulli

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq -1 \quad (13.1)$$

$$(1+x)^n \geq 1 + n x$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geq 0 \quad (13.2)$$

$$(1+x)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x^2$$

Dim di (13.1): induzione su n .

$$\underline{n=1}: \quad \forall x \geq -1 \quad (1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x \quad \text{Si}$$

Secondo passo dell'induzione:

Supponiamo

$$\forall x \geq -1 \quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

devo dimostrare

$$\forall x \geq -1 \quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

Fissiamo $x \geq -1$; abbiamo

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x)$$

$$\geq (1+nx)(1+x)$$

↑

ipotesi induttiva, e $x \geq -1$

$$= nx^2 + \cancel{nx} + \cancel{1} + x$$

$$\geq 1 + (n+1)x = \cancel{nx} + x + \cancel{1}$$

Si, perché $nx^2 \geq 0$

(13.2): per casa

Ricoveramento:

MARTEDI

17-18

MERCOLEDI

13-14