

Lezione 19 14/11/2018

10-13

Es 19.1.1 (Cava) Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

- 1) f è continua in I
- 2) $f^{-1}(A)$ è aperto in I in ogni aperto $A \subseteq \mathbb{R}$.

Oss 19.1.1 Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E$

Vi sono due casi:

- i) x_0 è isolato $x_0 \notin \overline{E \setminus \{x_0\}}$
- ii) x_0 non è isolato $x_0 \in \overline{E \setminus \{x_0\}}$

osservo che

x_0 isolato $\Rightarrow f$ continua in x_0

In fatti x_0 isolato $\Rightarrow \exists \rho > 0$:

$$E \cap B_\rho(x_0) = \{x_0\}$$

(in definizione, Def. 16.1.1). Devo dimostrare

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{(19.1.1)}{=} f(x_0) \text{ in } E \quad (\text{Def. 18.10.1})$$

Dal lemma di localizzazione (Lemma 18.3.1) ²

$$\text{la (19.1.1)} \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ su } E \cap B_p(x_0)$$

$$\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ su } \{x_0\}$$

che è sempre vera (senza ipotesi ulteriori su f).

Osservo una cosa più interessante: se

$x_0 \in \overline{E \setminus \{x_0\}}$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ su } E$$



(19.2.1)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ su } E \setminus \{x_0\}$$

Dimostriamo la (19.2.1):

$\Downarrow$ Segue dal lemma di restrizione (Lemma 18.1.1) applicato con la scelta $L = E \setminus \{x_0\} \subseteq E$, dato che $x_0 \in \bar{L}$, e $p = f(x_0)$.

↑↑ Applichiamo Lemma 18.5.1 (dell'

Unione) con al posto di $p \rightarrow f(x_0)$,

al posto di $E \rightarrow E \setminus \{x_0\}$

al posto di $F \rightarrow \{x_0\}$

per i (ster) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ su $E \setminus \{x_0\}$

Inoltre $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ su $\{x_0\}$

(sempre vero). Segue direttamente dal

Lemma 18.5.1 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ su E

Esempi di funzioni continue: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \text{const}$$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \sin x, \cos x, e^x, \sqrt[n]{x}, \ln x, \sinh x, \cosh x, \arctan x$$

sui loro domini $\log x, \lg x$

Somma ^{finite} di funzioni continue è continua, ^{su $\cap$ domini} Differenti,
Prodotto finito di funzioni continue è continuo, ^{su $\cap$ domini},
quoziente di funzioni continue è continuo
sul suo dominio;

Prop. 19.4.1

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in E$,
 f continua in x_0

$g: H \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $H \ni f(E)$

$y_0 = f(x_0) \in L$.

Se f continua in x_0
 g continua in $y_0 \Rightarrow g \circ f$ è
continua in x_0

Dim Devo dim.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0) \text{ in } E$$

Applico Lemma dello Compositore (Lemma 18.8.1)

con $\bar{x} = x_0$

$$p = f(x_0) = y_0$$

$$q = g(y_0)$$

Si ottiene $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(y_0)$ in E .

□

ES 19.4.1 Sia $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } x \in (0,1] \cap \mathbb{Q}, x = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}, \\ & (m,n) = 1 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \in (0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Allora

a) f è discontinua in $[0,1] \cap \mathbb{Q}$

b) f è continua in $[0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

a) si vede subito: sia $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $x = \frac{m}{n}$
 $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{n} > 0$. Poiché gli irrazionali

sono densi in $\mathbb{R}$, $\exists (i_n) \subset [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

$i_n \rightarrow x$. Ma $f(i_n) = 0$

ovviamente allora $f(i_n) \rightarrow 0 \neq f(x)$

Molto più difficile è dimostrare b)

Sia $x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \Rightarrow f(x) = 0$.

Sia $(x_n) \subset [0,1]$, $x_n \rightarrow x$. Devo
dim. $f(x_n) \rightarrow 0$

Se x_n è irrazionale $f(x_n) = 0$;

x_n è razionale $f(x_n) = \frac{1}{\text{denom. di } x_n}$

Cerca di vedere che

denom. $(x_n) \rightarrow +\infty$ $k n \rightarrow +\infty$

Abbiamo costruito una funzione discontinua
solo su $\mathbb{Q}$. « Molto più difficile è
mostrare che non esistono funzioni
continue solo su $\mathbb{Q}$ »

Teo 19.6.1 (Weierstrass) Siano $a, b \in \mathbb{R}$,
 $a \leq b$. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
 f continua in $[a, b]$.

Allora $f([a, b])$ è limitato, e
 $f([a, b])$ ammette minimo elemento e massimo

oss 19.7.1

Fatto 1) $[a, b]$ è chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ $\checkmark$
 $\Downarrow$ teo 17.8.1
compatto di $\mathbb{R}$

Vale in fatti

Teo 19.7.1 $K \subseteq \mathbb{R}$ compatto di $\mathbb{R}$

$f: K \rightarrow \mathbb{R}$ continua

Allora $f(K)$ è compatto

(dunque limitato e chiuso, e dunque ammette max e min. elements)

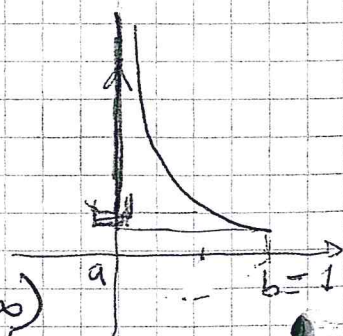
« Una funzione continua manda compatti in compatti »

La dim. di teo 19.7.1 è simile a dim. di teo 19.6.1

Fatto 2) le ipotesi di teo 19.6.1 sono

ottimali: $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

f continua



$f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, 1]$, $f((a, 1]) = [1, +\infty)$

non è sup. limitata, e non ammette punto di min.

Fatto 3) Questo teorema afferma l'esistenza di punti di massimo e di minimo, ma non suggerisce come trovarli. Se ad esempio

$y_{\max}$ è il massimo di $f([a, b])$

(massimo VALORE), $y_{\max} \in f([a, b])$

$\Rightarrow \exists x_{\max} \in [a, b]$ (punto di massimo)

taie che $f(x_{\max}) = y_{\max}$

Dm (teo 19.6.1) Dimostriamo che

$f([a, b])$ è limitato. Supp. per

assunto che $f([a, b])$ non sia limitato.

Dunque $f([a, b])$ è o illimitato superiormente

o illimitato inferiormente. Supponiamo ad esempio che $f([a, b])$ sia illimitato

superiormente (l'altro caso si fa in modo

simile). Dunque $\exists (y_n) \subset f([a, b])$,

$y_n \rightarrow +\infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ $\exists x_n \in [a, b]$

taie che $f(x_n) = y_n$. la successione (x_n)

è una successione di punti di $[a, b]$,
dal teo 11.10.1 (B.W.), $\exists (n_k)$
sotto succ. $\exists l \in [a, b]$ tali che

$$x_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} l$$

Ma f è continua in $[a, b]$, in particolare
è continua in l , dunque

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} f(l)$$

Ma $f(x_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \Rightarrow f(x_{n_k}) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} +\infty$
dall'unicità del limite

$\Rightarrow +\infty = f(l)$, ma f è a
valori reali, assurdo. Dunque f
è limitata.

Dimostriamo ora che $f([a, b])$ ammette
minimo elemento (e dim. che ammette
massimo elemento sarà simile). ... Dato
che $f([a, b])$ è limitato, ho

$$m := \inf f([a, b]) \in \mathbb{R}$$

Si tratta di dimostrare che $\inf f([a, b]) = \min f([a, b])$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists y_n \in f([a, b])$$

$$y_n < i + \frac{1}{n}$$

Dunque

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists \hat{x}_n \in [a, b] :$$

$$y_n = f(\hat{x}_n) < i + \frac{1}{n} \quad (19.10.1)$$

La successione $(\hat{x}_n)$ è una succ. di punti di $[a, b]$; dal lco 11.10.1

$$\exists (n_h) \quad \exists \hat{\ell} \in [a, b] \text{ tali che}$$

$$\hat{x}_{n_h} \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} \hat{\ell}$$

Essendo f continua in $[a, b]$, f è continua in $\hat{\ell} \Rightarrow f(\hat{x}_{n_h}) \xrightarrow{h \rightarrow +\infty} f(\hat{\ell})$

Dalla (19.10.1) segue

$$y_{n_h} = f(\hat{x}_{n_h}) < i + \frac{1}{n_h} \quad \forall h \in \mathbb{N}$$

Passando al limite per $h \rightarrow +\infty$

$$f(\hat{\ell}) \leq i \quad (19.10.2)$$

Dunque

$$f(\hat{l}) = i$$

Anche

$$i = \min f([a, b])$$

□

Su cosa è basata la def:

- $\inf, \sup$
- B.W. (basato ad esempio su max/min, min/max che siano $\inf, \sup$ concreti)
- continuità per successioni (punto 2) / og 10 oss. 18.b.1)

oss 19.11.1 Per ottenere la (19.10.2) basta

meno della continuità di f per

successioni. Basta, per l'esistenza del valore minimo

$$\forall x \in [a, b], \quad \forall (x_n) \subset [a, b], x_n \rightarrow x$$

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \quad (19.11.1)$$

- Esistono funzioni discontinue che verificano (19.11.1).

- Se f è continua in $[a, b]$ verifica (19.11.1).

Per esistenza valore massimo serve invece

$$\forall x \in [a, b], \quad \forall (x_n) \subset [a, b], x_n \rightarrow x$$

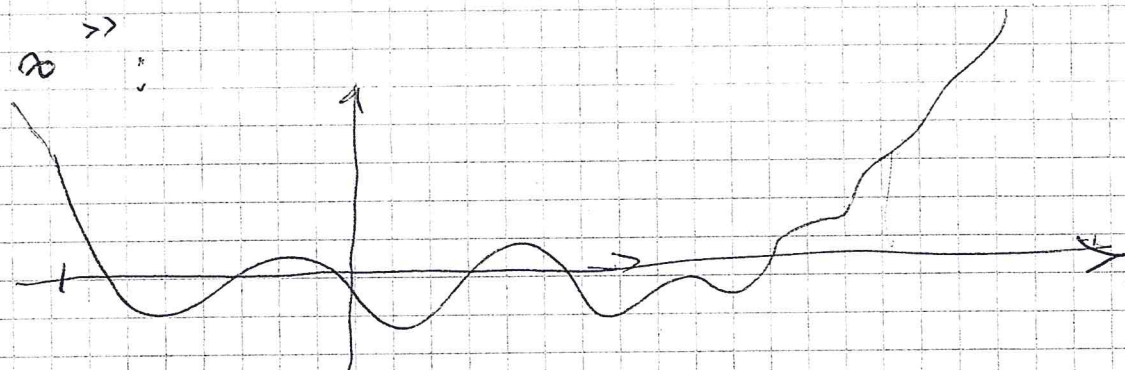
(19.11.2)

Se f verifica (19.11.1) si dice che

f è (sequenzialmente) semicontinua
inferiormente, e f verifica (19.11.2) si dice
che f è (sequenzialmente) semicontinua
superiormente in $[a, b]$.

Oss 19.12.1 Se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, e sono interessati
alla ricerca dei minimi, $\uparrow$ non è limitato

c'è bisogno di ipotesi "di crescita di f
all' ∞ ":



Teo. 19.12.1 (teorema dei valori intermedi)

Sia $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$,

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

f continua in $[a, b]$.

Allora f assume tutti i valori V tra il

suo valore massimo e il suo valore minimo.

Oss 19.12.2 TP valori max/min c'è in il teo 19.6.1.

Questo teo^{ma} si può enunciare in modo equivalente: $\mathbb{R}$

« f continua su ogni intervallo in
intervalli »

« f continua su ogni insieme
connesso »

Def. 19.13.1 $C \subseteq \mathbb{R}$ si dice

connesso quando C non si può
scrivere come unione di due aperti
non vuoti e disgiunti.