

Lezione 18

13/11/2018

14-17

1

Proprietà fondamentali delle nozioni di limite.

Lemma 18.1.1 (Restrizione)

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \bar{E}$$

$$\text{Sia poi } L \subseteq E, \quad \bar{x} \in \bar{L}$$

$p \in \mathbb{R}$ (vale anche negli altri casi)

$$\text{Se } \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p \text{ su } E \quad (1.1.1)$$

$$\text{allora } \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p \text{ su } L. \quad (1.2)$$

Esempio $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad p = 1$

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad \forall x \in E$$

$$0 \in \bar{E}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \text{ su } E$$

$$L = (0, +\infty) \subseteq E, \quad 0 \in \bar{L}$$

$\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \text{ su } L$$

Lemma 18.1.1

Analogamente scegliendo $L = (-\infty, 0)$

Notazione $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ su $(0, \alpha)$

Che $\alpha \in (0, +\infty]$ si chiama limite
destro di f in 0 e si indica con $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(a volte $\lim_{x \downarrow 0} f(x)$)

Invece $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ su $(-\alpha, 0)$

si chiama limite sinistro di f in 0 ,
e si indica con $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

(a volte $\lim_{x \uparrow 0} f(x)$)

« Se $\exists$ limite, allora $\exists$ limite destro,
 $\exists$ limite sinistro, e questi tre limiti
sono uguali fra loro »

Più interessante è il contrario:

« $\exists$ limite destro, $\exists$ limite sinistro, e sono

uguali $\Rightarrow \exists$ limite (uguale a limite destro)
e sinistro »
vedi Lemma 18.5.1

Dm (Lemma 18.1.1)

Per dm. (1.1.2) uso la 2) del Lemma 16.3.1: devo dunque dimostrare $\forall (x_n)$ successione di punti di L convergente a $\bar{x}$, si ha $f(x_n) \rightarrow p$.

Prendiamo dunque una successione $(x_n) \subset L$ convergente a $\bar{x}$. Poiché $L \subseteq E$ e $x_n \in L$, ho $x_n \in E$. Dunque (x_n) è una successione di punti di E convergente a $\bar{x}$. Dato che per ipotesi ho $f(x) = p$ su E , $x \rightarrow \bar{x}$ dalla 2) del Lemma 16.3.1 segue

$$f(x_n) \rightarrow p.$$

«L'operazione di limite è "locale", cioè non fa uso di informazioni su f date su punti lontanissimi a $\bar{x}$ »

Lemma 18.3.1 (Localizzazione) Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \bar{E}$, $p \in \mathbb{R}$ (vale anche negli altri casi) o...

Allora sono equivalenti:

4

$$1) \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p \quad \text{su } E$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p \quad \text{su } E \cap B_p(\bar{x})$$

(nota: $\bar{x} \in \overline{E \cap B_p(\bar{x})}$)

Dim. $1) \Rightarrow 2)$

Basta applicare Lemma 18.1.1 con

$$L = E \cap B_p(\bar{x}) \subseteq E.$$

$2) \Rightarrow 1)$.

Uso il Lemma 16.3.1 punto 2).

devo dimostrare che $\forall (x_n) \subset E$

convergente a $\bar{x}$ si ha $f(x_n) \rightarrow p$.

Sia dunque (x_n) successione di punti di E convergente a $\bar{x}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > n_\varepsilon$$

$$\text{si ha } |x_n - \bar{x}| < \varepsilon.$$

Preso $\varepsilon = \rho$; allora $\exists n_\rho \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > n_\rho \quad \text{si ha } |x_n - \bar{x}| < \rho$$

151
• Dunque se $n > n_p$ $x_n \in E \cap B_p(\bar{x})$

La successione $(x_n)_{n > n_p}$ consiste di
punti di $E \cap B_p(\bar{x})$, e molto converge a $\bar{x}$.

Allora la mia ipotesi 2) è il

• Lemma 16.3.1 2) implicano
 $f(x_n) \rightarrow p$. $\square$

Lemma 18.5.1 (unione). Sia $E \subseteq \mathbb{R}$,

$F \subseteq \mathbb{R}$, $f: E \cup F \rightarrow \mathbb{R}$

100 $\bar{x} \in \bar{E} \cap \bar{F}$, $p \in \mathbb{R}$. Allora se

$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p$ su E

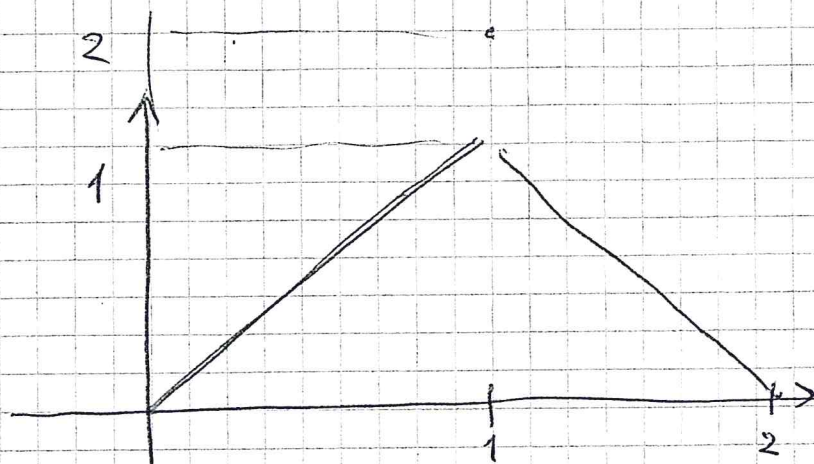
$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p$ su F

Allora $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p$ su $E \cup F$

105 « Esempio: se il limite, $\exists$ limite sinistro e
sono uguali allora $\exists$ limite (= limite destro) »

Esercizio

16.8.1



$$f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ su } [0, 2]$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$\text{su } [0, 2] \setminus \{1\}$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ su } [1, 2]$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$\text{su } (1, 2]$$

$$\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$\text{su } [0, 1)$$

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ su } [0, 1]$$

$$\text{Ricordare: } [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad \begin{matrix} a, b \in \mathbb{R} \\ a \leq b \end{matrix}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

Dim (Lemma 18.5.1). Ulteriormente

ip Lemma 18.3.1 punto 1):

$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p$ in E significa

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \quad \underline{\forall x \in E} \quad |x - \bar{x}| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon \quad (18.7.1)$$

$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p$ in F significa

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \sigma_\varepsilon > 0 : \quad \underline{\forall x \in F} \quad |x - \bar{x}| < \sigma_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon \quad (18.7.2)$$

Adesso, fissato $\varepsilon > 0$, definisco $\zeta_\varepsilon :=$

$\min(\delta_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) > 0$. Dico che

$$\forall x \in E \cup F \quad |x - \bar{x}| < \zeta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon.$$

Infatti

$$\text{Sia } x \in E \cup F; \quad \text{se } x \in E \text{ e } |x - \bar{x}| < \zeta_\varepsilon, \\ |x - \bar{x}| < \delta_\varepsilon \quad \xRightarrow{(18.7.1)} \quad |f(x) - p| < \varepsilon$$

$$\text{Se } x \in F \text{ e } |x - \bar{x}| < \zeta_\varepsilon, \quad |x - \bar{x}| < \sigma_\varepsilon$$

$$\Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon. \quad (18.7.2)$$

In conclusione, ho dimostrato:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \quad \forall x \in EUF, \\ |x - \bar{x}| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - p| < \varepsilon.$$

Ma questa è la tesi, cioè

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p \quad \text{in } EUF$$

(grazie al Lemma 16.3.1 1))

□

Oss 18.8.1 È la prima volta che usiamo la 1) (e non la 2)) del Lemma 16.3.1.

L'ultima proprietà che vogliamo studiare è molto usata negli esercizi:

Lemma 18.8.1 (Composizione)

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in E$

$p \in \mathbb{R}$ (vale anche negli altri casi); siano inoltre

$q \in \mathbb{R}$, $g: H \supseteq f(E) \rightarrow \mathbb{R}$

($\text{dom}(g) \supseteq \text{im}(f)$); ^{Supponiamo} $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p$ su E ,

$$\lim_{y \rightarrow p} g(y) = q \quad \text{su } H. \quad (18.9.1)$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(f(x)) = q \quad \text{su } E$$

Oss 18.9.1 Dall' esercizio 16.9.1 abbiamo
 $p \in \overline{f(E)}$, e dunque ha senso
la (18.9.1).

Dim : Uso Lemma 16.3.1 2)

Sia $(x_n) \subset E$ convergente a $\bar{x}$.

Devo dim. $g(f(x_n)) \rightarrow q$.

Poiché per ipotesi $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p$ in E ,

ne segue che $f(x_n) \rightarrow p$. Dunque

$(f(x_n)) \subset f(E) \subset H$ è una m.c.c. convergente

a p . Poiché per ipotesi $\lim_{y \rightarrow p} g(y) = q$ su H ,

ne segue che $g(f(x_n)) \rightarrow q$.

□

Def 18.10.1

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

10

Sia $x_0 \in E$. Si dice che f è continua in x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{su } E$$

Oss 18.10.1

Questo è un caso

particolare di Def. 16.3.1 quando mettiamo al posto di $\bar{x}$, e $f(x_0) \in \mathbb{R}$ al posto di p .

Nota che $x_0 \in E \subseteq \bar{E}$.

Essendo dunque un caso particolare, per dimostrare che f è continua in x_0 devo usare Lemma 16.3.1. In una delle sue due forme equivalenti:

$$1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0: \quad \forall x \in E, |x - x_0| < \delta_\varepsilon \\ \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$2) \quad \forall (x_n) \subset E, \quad x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

Def 18.10.2

Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Si dice che f è continua su E e f è continua in x_0 se f è continua in x_0 per ogni $x_0 \in E$.

Def 18.11.1 $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x_0 \in E.$

Si dice che f è discontinua in x_0 se f non è continua in x_0 .

ES 18.11.1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha \in \mathbb{R} & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

È possibile scegliere α in modo da rendere f continua in 0?

No, segue immediatamente da ES. 17.4.1

Ad esempio, scelto $\alpha = 0$, ho

$$(x_n) \subset \mathbb{R} : f(x_n) = 1, x_n \rightarrow 0;$$

dunque $f(x_n) \rightarrow 1 \neq 0 = f(0)$.

Con un altro valore di α il ragiona-
mento era simile. « Questa ^{punto di} discontinuità
resiste di discontinuità, non si può eliminare »

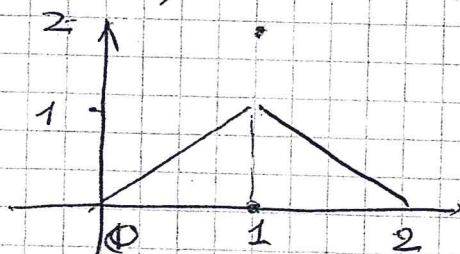
ES 18.11.2

f è disc. in $x=1$

$$\exists x_n \rightarrow 1, f(x_n) \rightarrow 1$$

#

$$f(1) = 0$$



Per L. ch

ridefinite f

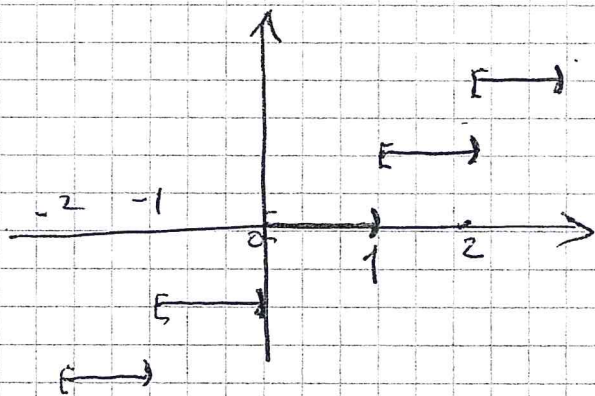
$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in [0, 2] \setminus \{1\} \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

In questo modo $\hat{f}$ è continua in $[0, 2]$
e il punto di discontinuità è stato
«eliminato».

Funzioni «strane»:

$$f(x) = [x]$$

$$f(1) = 1, f(2) = 2 \text{ ecc}$$



f è discontinua su $\mathbb{Z}$; infatti

$$\text{se } z \in \mathbb{Z} \quad \exists (x_n), (t_n) \subset \mathbb{R}$$

$$x_n \rightarrow z$$

$$f(x_n) \rightarrow z$$

$$t_n \rightarrow z$$

$$f(t_n) \rightarrow z - 1$$

(uso la caratterizzazione 2) alla
fine di pag 10). Inoltre f è continua
su $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Esiste $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ (con 2 soli valori!!) limitata 13
discontinua in tutti i punti di $[0,1]$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$

funzione di Dirichlet

Vedo che $x \in [0,1]$ è di disc.:

infatti $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$; $f(x) = 1$

Ma $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$ è denso in $[0,1]$;
in particolare $\exists (i_n) \subset (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$

$i_n \rightarrow x$. Ma $f(i_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

dunque $f(i_n) \rightarrow 0 \neq 1 = f(x)$

Analogamente si ragiona per $x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]$
usando la densità dei razionali.