

Lezione 17

8/11/2018

9-11

Esercizi per Casa:

$$\text{dom}(f), \quad f(x) = \underbrace{\log(1+x)}_x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \quad \text{su } (-1, +\infty) \setminus \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \text{su } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

ES 17.1.1 (Fuori programma)Trovare $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(f(x)) = -x$$

Se volessi proporre un esercizio con

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{su } (0, +\infty)$$

(a parte il problema di definire a^x
 con x reale, $a > 0$...)

Def 17.1.1

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$E \subseteq (\lambda, +\infty), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$p \in \mathbb{R} \quad \swarrow \quad \text{Si potrebbe anche dire}$$

$$\text{Scrivo} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = p \quad \text{su } E$$

2

Se una delle affermazioni equivalenti vale:

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha \in \mathbb{R} :$

$$\forall x \in E, \quad x > \alpha \implies |f(x) - p| < \varepsilon$$

oppure

2) $\forall$ successione (x_n) di punti

di E convergente a $+\infty$ si ha che $(f(x_n))$ converge a p .

ES 17.2.1. Sarebbe che già vuol dire

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = p \in \mathbb{R} \quad \text{in } E$$

Def 17.2.1 Sia $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$\bar{x} \in \bar{E} \subseteq \mathbb{R}$. Siamo

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = +\infty \quad \text{in } E \quad (17.2.1)$$

$\forall K \in \mathbb{R} \quad \exists \delta = \delta_K > 0$ tale che

$$\forall x \in E \quad |x - \bar{x}| < \delta \implies f(x) > K$$

Anche questo si caratterizza usando le successioni.
Per cosa $-\infty$ al posto di $+\infty$ nella (17.2.1)

ci sono ancora casi da definire, ad es. ³

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{in } E$$

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} :$$

$$\forall x \in E \quad x > x \Rightarrow f(x) > M$$

Equivalentemente $\forall$ successione (x_n)
di punti di E convergente a $+\infty$
si ha $(f(x_n))$ converge a $+\infty$.

Gli altri casi per casa.

Come regole per limiti di somme ^{finite} (differenze),
prodotti, quozienti ecc. Se voglio

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) + \lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x)$$

$\swarrow$
 $S_1 \in E \cap F$

devo ad esempio sull'asse:

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: F \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{x} \in E \cap F \subseteq \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = p \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad \text{in } E$$

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} g(x) = q \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad \text{in } F,$$

escludendo
il caso $p = +\infty$
 $q = -\infty$,

grazie a quanto scritto a pag 9 lezione 10,
e alla caratterizzazione del limite per

successioni (Lemma 16.3.1). <sup>Si esclude
il caso $x \rightarrow +\infty$</sup>

oss 17.4.1 $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \bar{x} \in \bar{E} \subseteq \mathbb{R}$

$g: F \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g$ limitata, $\bar{x} \in \bar{F}$

(cioè $\exists K > 0: |g(x)| \leq K \forall x \in F$).

Imponiamo $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = 0$ in E

Allora $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} (f(x)g(x)) = 0$ in $E \cap F$

« limite di prodotto di una fun. infinitesima
per una limitata e infinitesima »

ES 17.4.1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, q \in \mathbb{R}$

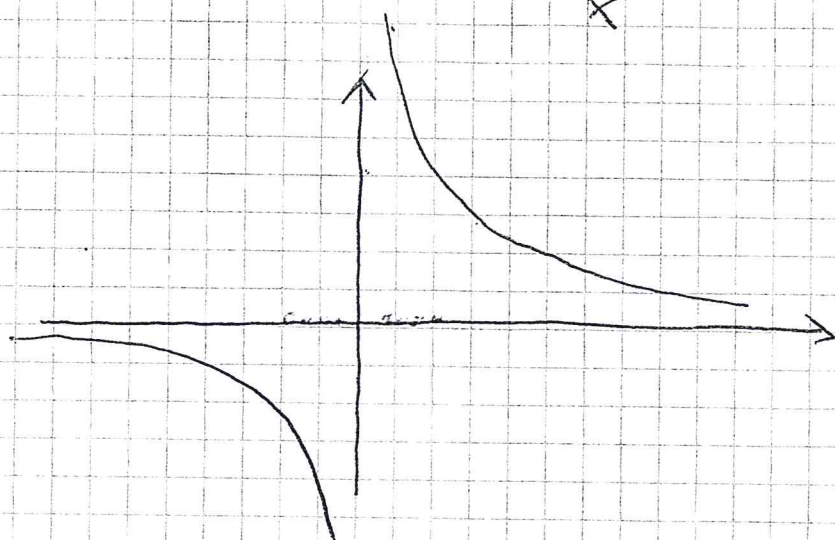
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ q & x = 0 \end{cases}$$

$0 \in \mathbb{R} = \bar{\mathbb{R}}$ (chiusura in $\mathbb{R}$)

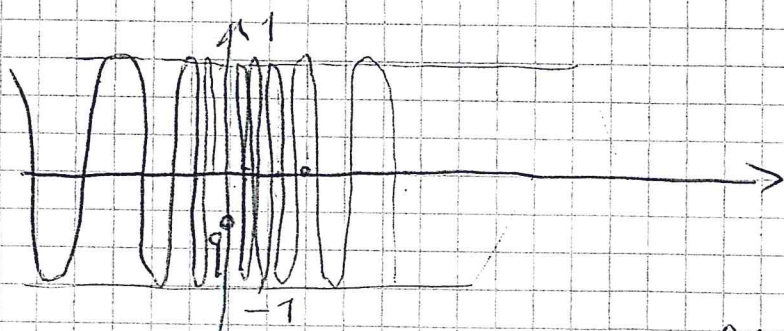
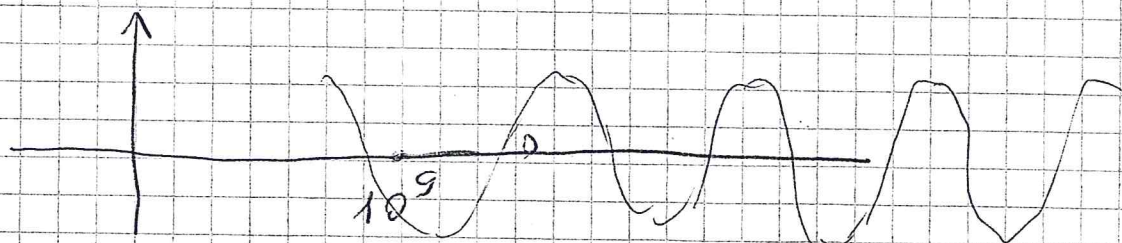
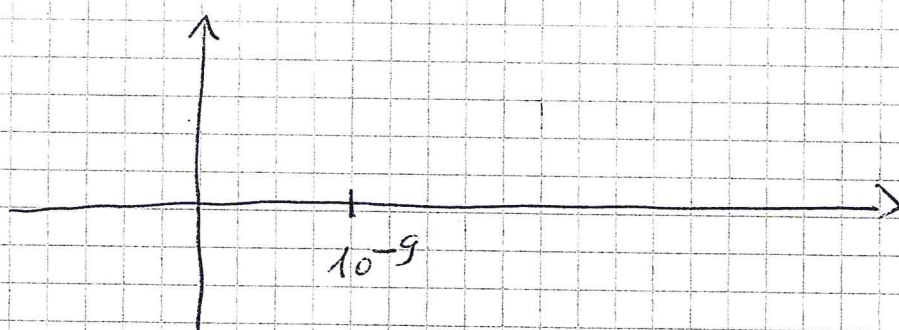
i) $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ in $\mathbb{R}$. ? No

ii) $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$? No
 $0 \in \overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$

g: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \frac{1}{x}$



$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



i) : $x_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$f(x_n) = 9 \rightarrow 9$

$a_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi} \rightarrow 0$

$b_n = \frac{1}{3\pi + 2n\pi}, \quad f(a_n) = 1 \rightarrow 1$
 $f(b_n) = -1 \rightarrow -1$

In realtà $\forall y \in [-1, 1]$

16

$$\exists (z_n) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad z_n \rightarrow 0,$$

$$f(z_n) \rightarrow y.$$

Tutto questo si ripete in la domanda ii)

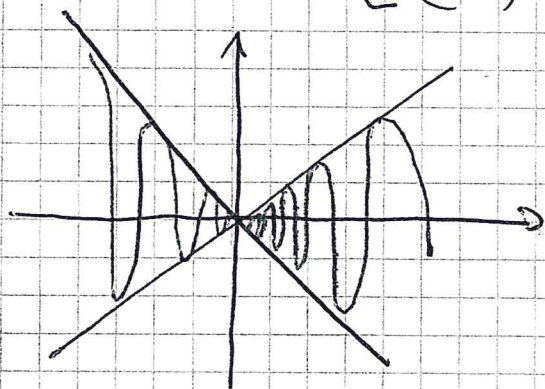
Casi: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

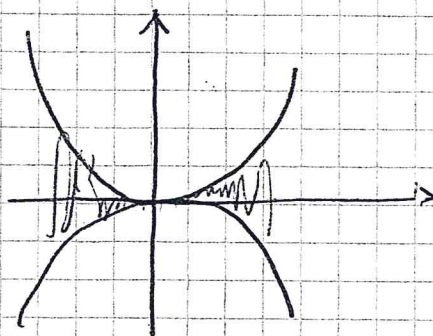
Come « migliorare » la f , aumentando
(con aumentamento da decidere) le oscillazioni

$$S(x) = \begin{cases} x^\beta \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ (-x)^\beta \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, x < 0 \end{cases}$$

$\beta > 0$

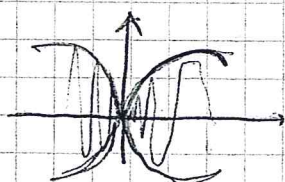


$\beta = 1$



$\beta = 2$

i) } $\exists \lim_{x \rightarrow 0} S' = 0$
ii) } in fatti



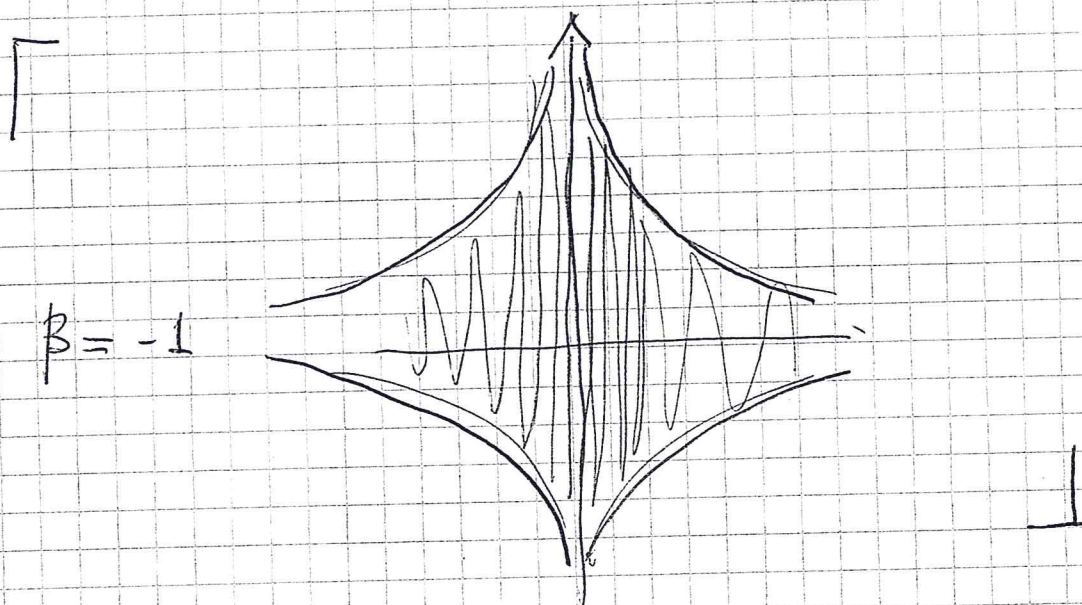
$\beta = 1/2$

$$\sqrt{|x|}$$

Sei $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (o auch $(x_n) \in \mathbb{R}$)

$$x_n \rightarrow 0; \quad S(x_n) = \begin{cases} |x_n|^\beta \sin \frac{1}{x_n} & x_n \neq 0 \\ 0 & x_n = 0 \end{cases}$$

$$|x_n|^\beta \rightarrow 0 \quad (\beta > 0)$$



$$|\sin(x_n)| \leq 1$$

$\Rightarrow$

$$S(x_n) \rightarrow 0$$

oss. 17.6.1

□

ES 17.7.1

~~$\nexists$~~

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin|x|}{x}$$

in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

8

Teo 17.8.1. Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ Allora

Sono equivalenti (in $\mathbb{R}$):

1) K compatto

2) K chiuso e limitato.

oss 17.8.1 Il vero teorema sarebbe

K compatto $\Leftrightarrow K$ completo
e totalmente limitato

Ma il teo 17.8.1. diventa quello
corretto perché lavoriamo in $\mathbb{R}$
(o più in generale $\mathbb{R}^n$)

Dim (Teo 17.8.1) $1) \Rightarrow 2)$

Sia $K \subseteq \mathbb{R}$ compatto. Allora K
è chiuso in $\mathbb{R}$ dall'esercizio 13.6.1

Vediamo che K è limitato. Supp. per
assurdo che K non sia limitato. Cioè

K o non è sup. limitato oppure non
è inf. limitato. Supponiamo ad esempio

che K non sia sup. limitato
 (il caso K non inf. limitato si fa
 in modo simile).

Dunque $\exists (x_n)$ successione di
 punti di K convergenti a $+\infty$.

Ma allora da tale successione

non è possibile estrarre alcuna
 sottosucc. convergente a un punto di K .

Dunque K non può essere compatto.

2) $\Rightarrow$ 1) Sia $K \subset \mathbb{R}$ chiuso ^(in $\mathbb{R}$) e
 limitato. Allora $\exists a, b \in \mathbb{R}, a < b$:

$K \subset [a, b]$. Ma dal teo 13.5.1

segue che $[a, b]$ è compatto. Vale

in generale che un sottoinsieme chiuso
 contenuto in un compatto è compatto.

Infatti: sia $(x_n) \subset K$ una successione.

Dato che (x_n) ammette una sottosucc.

convergente a un punto di K . Ma $K \subset [a, b]$

ha $(x_n) \subset [a, b]$. Essendo $[a, b]$ compatto,

$\exists (x_{n_j})$ sotto succ. di (x_n) ,

$\exists l \in [a, b] : \quad x_{n_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} l$

Essendo ciascun $x_{n_j} \in K$, e essendo K chiuso, dato che $x_{n_j} \rightarrow l$ necessariamente $l \in K$.

Donque K è compatto.

□