

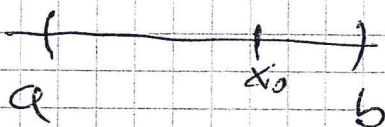
$$f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{con } E \neq \emptyset)$$

(Non basterà studiare $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

non basterà studiare $f: I \text{ intervallo} \rightarrow \mathbb{R}$)

Esempio interessante di $E = (a, b) \setminus \{x_0\}$

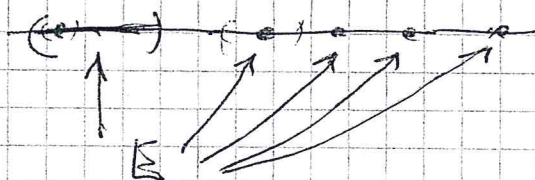
con $x_0 \in (a, b)$



Def 16.1.1 Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in E$.

Si dice che x_0 è un punto isolato

$$\text{di } E \text{ se } \exists \rho > 0 : E \cap (x_0 - \rho, x_0 + \rho) = \{x_0\}$$



qui i punti di E sono
isolati (e sono i soli)

ES 16.1.1 Sia $x_0 \in E$ non isolato,

Allora $x_0 \in \overline{E \setminus \{x_0\}}$

(vedi Def. 13.8.3)

$E \ni x_0$ non è isolato $\Rightarrow \forall \rho > 0$

$E \cap (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ contiene almeno
un punto (di E) diverso da x_0
(oltre a contenere x_0); $\forall k \in \mathbb{N}$

preso $\rho = \frac{1}{k}$ ho $\exists x_k \in (x_0 - \frac{1}{k}, x_0 + \frac{1}{k}) \cap E$

$$x_k \neq x_0$$

$|x_0 - x_k| < \frac{1}{k}$. Dunque ho costruito

(x_k) successione di punti ^{di E} convergente

a x_0 in $k \rightarrow +\infty$, con l'assunto $x_k \neq x_0$

Questo vuol dire proprio

$$x_0 \in E \setminus \{x_0\}.$$

Voglio definire cosa vuol dire, in

$$f: \begin{matrix} E \\ \cap \\ \mathbb{R} \end{matrix} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\#) \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) \text{ su } E$$

$$\text{quando } \boxed{\bar{x} \in \overline{E}} \subseteq \mathbb{R}$$

Il seguente risultato sarà utile in
ridurre $(\#)$ a un limite di successioni.

Lemma 16.3.1 Sia $\overline{x} \in \overline{E}$, $p \in \mathbb{R}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ 3
 $E \subseteq \mathbb{R}$ Sono equivalenti:

1) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0$

$$\forall x \in E, \quad |x - \overline{x}| < \delta_\varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow |f(x) - p| < \varepsilon$$

2) $\forall$ successione (x_n) di punti di E convergente a $\overline{x}$ si ha che $(f(x_n))$ converge a p .

Def 16.3.1 Se $f: E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\overline{x} \in \overline{E}$, $p \in \mathbb{R}$, diremo
 $\lim_{x \rightarrow \overline{x}} f(x) = p$ su E

è valgono 1) o 2)

Oss 16.3.1 $\overline{x}$ non nec. appartiene a E
 (E è il dominio di f , $E = \text{dom}(f)$)
 ma deve appartenere a $\overline{E}$.

Il caso $p = \pm \infty$ viene fatto dopo

1) $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$ tale che

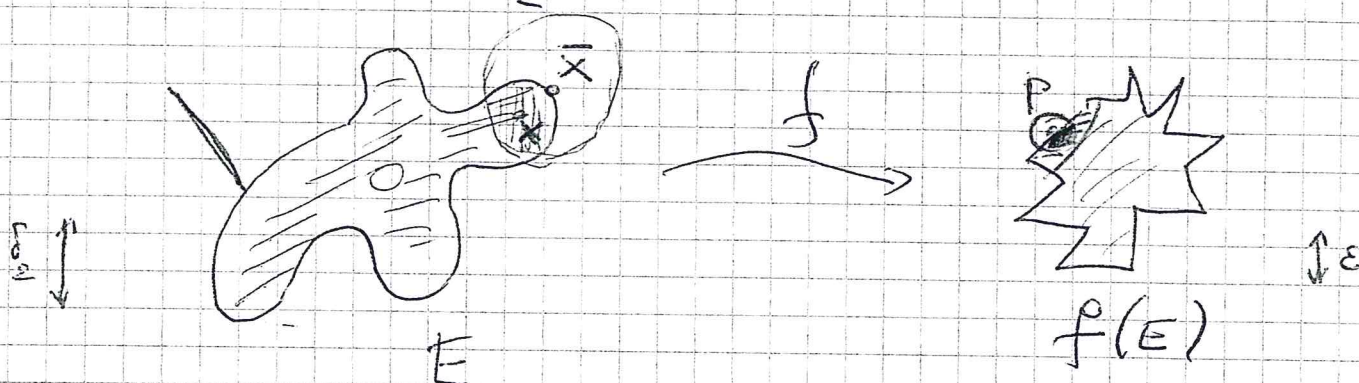
4

se x appartiene a $E \cap B_{\delta_\varepsilon}(\bar{x})$

allora $f(x)$ appartiene $B_\varepsilon(p)$:

Cioè $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$:

$$x \in E \cap B_{\delta_\varepsilon}(\bar{x}) \Rightarrow f(x) \in B_\varepsilon(p)$$



$\bar{x}$ non nec. appartiene a $\text{dom}(f)$

p non nec. appartiene a $f(E)$

In 2) c'è almeno una successione (x_n) tale che $\bar{x} \in \overline{E}$. E sufficientemente

in 1) $\exists$ almeno un $x \in E$ con

$$|x - \bar{x}| < \delta_\varepsilon.$$

La scrittura $f(\bar{x})$ non allora (e

non può arrivare) perché non è detto che $\bar{x} \in E = \text{dom}(f)$.

ES 16.5.1

5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{su } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Applico Lemma 16.3.1: basta dim.
che $\forall (x_n) \quad x_n \rightarrow 0, x_n \neq 0$
si ha

$$\frac{\sin x_n}{x_n} \rightarrow 1$$

Ma questo è l'esercizio 10.15.3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad \text{su } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Nota Bene: $0 \in \overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$.

Dim. (Lemma 16.3.1) $1) \Rightarrow 2)$

Sia (x_n) una n.c. di punti di E

convergente a $\bar{x}$. Per ipotesi vale 1),

quindi in corrispondenza di $\varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$
per cui vale la 1). Poiché $x_n \rightarrow \bar{x}$

$\exists n_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > n_{\delta_\varepsilon}$

$|x_n - \bar{x}| < \delta_\varepsilon$, Allora $1) \Rightarrow$

$$|f(x_n) - p| < \varepsilon.$$

In conclusione: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon = n_\varepsilon \in \mathbb{N}$
 tale $\forall n > n_\varepsilon \quad |f(x_n) - p| < \varepsilon.$

Cioè $(f(x_n))$ converge a p .

2) $\Rightarrow$ 1) Neghiamo la 1)

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in E \quad (16.6.1) \\ |x - \bar{x}| < \delta \quad \text{e} \quad |f(x) - p| \geq \varepsilon$$

Prendo $\delta = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$. La (16.6.1)
 si legge come segue:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists x_n \in E \\ |x_n - \bar{x}| < \frac{1}{n} \quad , \quad |f(x_n) - p| \geq \varepsilon$$

Ho costruito una m.c. (x_n) di punti di E
 convergente a $\bar{x}$ per $n \rightarrow +\infty$, e tale
 da $|f(x_n) - p| \geq \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Da qui $(f(x_n))$ non può convergere a p .

Questo è la negazione di 2). Dunque
 non 1) $\Rightarrow$ non 2)

« Adottando $[AB, (G.G)]$ il
Lemma 16.3.1 ha $\bar{x} \in \text{acc}(E)$,
nella 1) $x \neq \bar{x}$, e nella 2) $x_n \neq \bar{x}$. »

Stessa cosa per $[G]$, p. 72 An. Mat. di base.

Def 16.7.1 Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$,
 $x_0 \in \mathbb{R}$. x_0 si dice di
accumulazione in E , e
 $\forall p > 0 \quad \exists x \in E \cap (B_p(x_0) \setminus \{x_0\})$.

Equivalentemente, x_0 esiste una
successione (x_n) di punti di E diversa
da x_0 convergente a x_0 .

Oss 16.7.1 Se $x_0 \in E$ è isolato
non è di accumulazione in E .

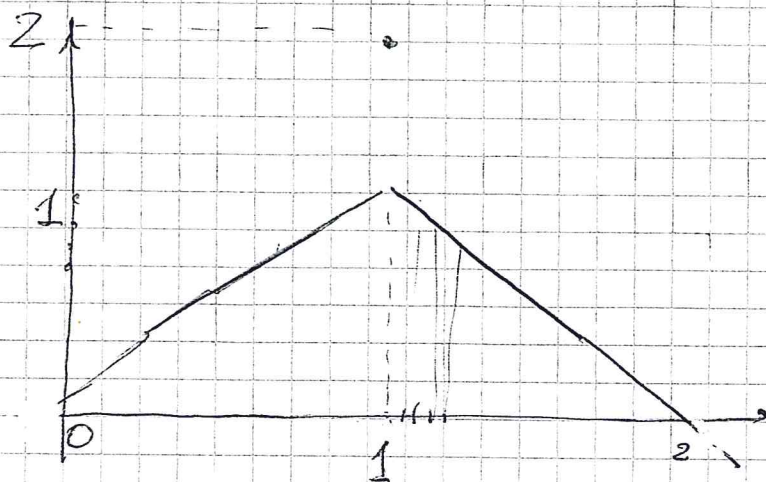
Di conseguenza (anche se non è molto
importante) noi possiamo definire

lim $f(x)$ in E con $\bar{x} \in E$ isolato,
 $x \rightarrow \bar{x}$

mentre questo non si può fare usando
la def di $[AB]$ $[G]$ ecc.

ES 16.8.0 Se il limite esiste, è unico 8
(CASA)

ES 16.8.1



$$1 \notin f([0, 2])$$

$$\text{dom}(f) = [0, 2]$$

$\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ su } [0, 2] \quad ?$	No
--	----

$$1 \in [0, 2] = [0, 2] \quad \text{Si}$$

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}$$

$$\text{Sia } (x_n) \subset [0, 2], \quad x_n \rightarrow 1$$

$$f(x_n) \rightarrow ? \quad \text{Il limite non } \exists$$

$$f\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$$

$$f(1) \rightarrow 2$$

$$x_n = 1 \quad \text{VAGNA}$$

Nel senso di $[AB]$, o $[G]$;

$$1 \in \text{acc}[0, 2] \quad ? \quad \text{Si}$$

il limite $\exists$ ed è 1

$\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \text{ su } [0, 2] \setminus \{1\}$
--

$$1 \in [0, 2] \setminus \{1\}$$

« Si Ritorna $[AB]$, $[G]$,
sostituendo $E \setminus \{x_0\}$ al posto
di E , e avendo

Es 16.2.1. Nella Def. 16.3.1 $\bar{c}$

Vero o no che $p \in \overline{f(E)}$?

Questo equivale a chiedersi se

$$\exists y_n \in f(E), y_n \rightarrow p.$$

Equivalentemente

$$\exists x_n \in E : f(x_n) = y_n, y_n \rightarrow p$$

Equivalentement

$$\exists x_n \in E : f(x_n) \rightarrow p$$

Perché $\bar{x} \in E$, lo che $\exists x_n \in E, x_n \rightarrow \bar{x}$.

Per questo successo, e usare la 2)

$$(f(x_n) \rightarrow p).$$