

Lezione 15 6/11/18

16-17

1

Tra le serie a termini qualunque,
vi sono le serie a termini alterni,

della forma $\sum (-1)^n a_n$, con $a_n \geq 0$

Il teorema del confronto permette di
dim.

Teo 15.1.1 (Criterio di Leibnitz)

Sia $(a_n)_{n \geq 0}$ una successione di numeri
reali non negativi, e supponiamo

1) (a_n) decrescente

2) $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Allora $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \in \mathbb{R}$

Ad esempio, risulta che $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{R}$
perché $a_n = \frac{1}{n}$ verifica le tre

ipotesi del teo. 15.1.1.

Dim $S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots$

Vediamo che succede per n pari e n dispari.

$$S_{2k+2} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2k+2}$$

$$= S_{2k} - a_{2k+1} + a_{2k+2}$$

L'ipotesi 1) $\Rightarrow a_{2k+2} \leq a_{2k+1}$

$$\Rightarrow a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq 0$$

$$\Rightarrow S_{2k+2} \leq S_{2k}$$

Dunque la successione (S_{2k}) è decrescente.

$$S_{2k+3} = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{2k+3}$$

$$= S_{2k+1} + a_{2k+2} - a_{2k+3}$$

Ma $a_{2k+3} \leq a_{2k+2} \Rightarrow a_{2k+2} - a_{2k+3} \geq 0$

$$\Rightarrow (S_{2k+1}) \text{ è crescente.}$$

Inoltre (S_{2k}) è limitata dal basso (e dall'alto) e (S_{2k+1}) è limitata dall'alto (e dal basso). Infatti:

$$S_{2k} = a_0 - a_1 + a_2 - \dots - a_{2k-1} + a_{2k}$$

$$\Rightarrow a_{2k} \geq 0$$

$$S_{2k+1} = a_0 - a_1 + a_2 - \dots + a_{2k} - a_{2k+1}$$

$$\leq a_0 - a_{2k+1} \leq a_0$$

Donque (S_{2k}) è decrescente limitata

(S_{2k+1}) è crescente limitata

$$\stackrel{\text{teo. g. u. i.}}{\Rightarrow} \begin{cases} S_{2k} \longrightarrow l_p \in \mathbb{R} \\ S_{2k+1} \longrightarrow l_d \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\text{Ma } l_p = l_d$$

$$S_{2k+1} - S_{2k} = -a_{2k+1} \xrightarrow{\text{ip. 2)}} 0$$

$$0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} (S_{2k+1} - S_{2k}) = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_{2k+1} - \lim_{k \rightarrow +\infty} S_{2k}$$

$$= l_d - l_p. \quad \text{Donque } l_d = l_p =: l$$

Dico che (S_n) converge a l .

Questo segue da: Supponiamo (b_n)

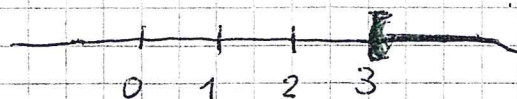
una succ. di numeri reali, avente

Due sotto successioni convergenti allo
stesso limite, $\searrow$ sotto successioni tutta
indici in comune, e con unione
di tutti gli indici $= \mathbb{N}$. Allora
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l$, Per caso.

Esercizio 16.12.2

5

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$$



se $x=2$ la serie converge (con somma 0)

se $x=1$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

posto $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, si può applicare Teo 18.1.1.

e dunque
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \in \mathbb{R} \quad (\text{non conv. assolutamente})$$

se $x=0$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n}} \cdot (-1)^n$$
 vedi pag 7.

se $x > 3 \Rightarrow x-2 > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n}} = +\infty$

che
vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n}} = +\infty$

$$\frac{\lambda^n}{\sqrt{n}} = +\infty$$

a termini
positivi

se $x=3$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty$$
 (Ricorda)

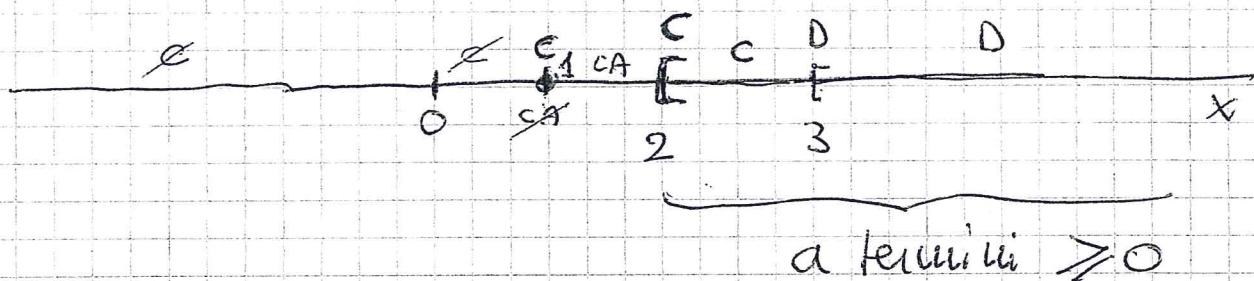
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} < +\infty \quad \mu \alpha > 1, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = +\infty \quad \mu \alpha \in [0, 1]$$

Sia $x \in (2, 3) \Rightarrow x-2 = a \in (0, 1)$

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n}}$

Perché $\frac{a^n}{\sqrt{n}} \leq a^n$, dal confronto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n}} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad a \in (0, 1)$$



Vediamo la convergenza assoluta

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|x-2|^n}{\sqrt{n}}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x \leq 2 \end{cases}$$

Se $|x-2| = d < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^n}{\sqrt{n}}$

converge. Dunque $x \in (1, 3)$ la serie conv.

assolutamente e dunque converge (teo 16.7.1)

Ma per $x \in (-\infty, 1)$:

$$\sum \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}} = \sum (-1)^n \frac{|x-2|^n}{\sqrt{n}}$$

Cioè $x-2 = -|x-2| < -1$

Ma certamente $(-1)^n \frac{|x-2|^n}{\sqrt{n}}$ non
(in realtà non annulla) è infinitesimale, dunque la serie
non può convergere. (vedi teo. 14.5.1) $\square$

ES 15.7.1 (per cora). Siano

$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie convergenti.

Dimostrare che $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) =$
 $= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$

(Nota: nessuna ipotesi sulla convergenza assoluta).

ES 15.7.2. (per cora) Supponiamo

$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$. Allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ < +\infty$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- < +\infty, \quad \text{e vale}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$$

osservazioni sulle serie a termini qualunque:

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} -$$

converge ma non assolutamente

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} -$$

$$\frac{3}{2}S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} -$$

$$\stackrel{?}{=} 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots \stackrel{?}{=} S$$

e $S \neq 0$

« gli addendi non si possono qui riordinare a piacere ». I riordinamenti sono invece leciti quando ho convergenza assoluta.

Es 15.9.1 (..... in corso)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$$



$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- < +\infty$$

Inoltre vale
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^-$$

Es 15.9.2.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}.$$

Allora
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- = +\infty$$

In fatti: negando lo teni abbiamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ < +\infty \quad \text{oppure} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- < +\infty$$

Caso in cui
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- < +\infty;$$

dell'esercizio 15.9.1 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty,$

e concludo. Supponiamo adesso $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = +\infty$

e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- < +\infty$. Abbiamo $a_n = a_n^+ - a_n^-$

$$\Rightarrow a_n^+ = a_n + a_n^-, \quad \forall a$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^+ = +\infty, \quad \text{mentre} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^- < +\infty,$$

$$\text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}, \quad \text{assurdo} \quad \square$$

Def 15.10.1 Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ una serie di numeri reali

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ si dice un riordina-
mento di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se esiste

$$\phi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \quad \text{bigettiva}$$

$$\text{tale che} \quad b_n = a_{\phi(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teo 15.10.2 (Dirichlet) Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

assolutamente convergente, e ha $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

un riordino di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Allora

anche $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge assolutamente e

$$\text{si ha} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n. \quad (15.10.1)$$

Dim. Supponiamo in contraddiria $a_n \geq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$. Consideriamo

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

Allora $\sigma_n \leq$ di una qualche somma
parziale di $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

$$\text{Dunque } \sigma_n \leq \sum_{j=1}^{+\infty} a_j < +\infty.$$

$$\text{Dunque } \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \leq \sum_{j=1}^{+\infty} a_j < +\infty$$

Basta scambiare il ruolo di a_n e b_n
per ottenere anche la diseg. inversa

$$\text{per cui } \sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j < +\infty$$

Se invece a_n non è ≥ 0 in ogni n
considero $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, che converge in ipotesi

Ovviamente $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ è un riordinamento
di $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, e per quanto appena visto

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| < +\infty, \text{ e } \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$$

Resta da dir la (15.10.1)

Si osserva che $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^+$ è un riordinamento ¹²
 di $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n^+$, che $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^-$ è un
 riordinamento di $\sum_{n=1}^{+\infty} q_n^-$, e si

conclude usando

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n &\stackrel{\text{es. 15.7.2}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^- \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} q_n^+ - \sum_{n=1}^{+\infty} q_n^- \\ &\stackrel{\text{es. 15.7.2}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} q_n \end{aligned}$$

□

Cominciamo lo studio di

$$f: E \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

da domani.