

Lezione 14

31/10/2018

10-13

La successione definita dal teo 13.12.1,

lo $\Rightarrow$, si può dimostrare anche

senza l'uso di $\liminf a_n$, $\limsup a_n$,

Come segue. Sia (a_n) di Cauchy in $\mathbb{R}$.

1) (a_n) è limitata (vedi pag 13
lezione 13).

2) Da Teo di B.W. (teo 13.1.1)

(a_n) ammette una sottosuccessione

(a_{n_k}) convergente a $p \in \mathbb{R}$.

3) data una successione di Cauchy
avente una sottosucc. convergente a
un numero reale, tutta la succ.
converge a quel numero reale.

Perché (a_n) verifica queste due
proprietà, se dimostro il punto

3) ho finito.

Abbiamo:

(a_n) di Cauchy significa:

$$(14.2.1) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m > \bar{n} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

(a_{n_k}) convergente significa:

$$(14.2.2) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{k} = \bar{k}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > \bar{k} \quad |a_{n_k} - p| < \varepsilon$$

Questo sono le nostre due ipotesi. Devo

dimostrare che $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$.

Fissiamo $\varepsilon > 0$; abbiamo $\bar{n}$ dato sopra.

Prendiamo $n \in \mathbb{N} \quad n > \bar{n}$. (14.2.3)

Prendiamo $k \in \mathbb{N}, k > \bar{k}, n_k > \bar{n}$ (14.2.4)

Scriviamo

$$|a_n - p| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - p|$$

$$\leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - p|$$

↑
proprietà triangolare di $|\cdot|$

$$\leq |a_n - a_{n_k}| + \varepsilon$$

↑
(14.2.3), (14.2.4)

$$\leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

(14.2.1), (14.2.3), (14.2.4)

Ne segue $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \forall n > \bar{n} \quad |a_n - p| < 2\varepsilon$

Dunque $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$

□

« gli spazi in cui le successioni di Cauchy sono convergenti si chiamano completi ».

Teo 14.3.1 (equivalente alla Prop 13.1) $\Rightarrow$ $\mathbb{R}$ è completo.

ES 14.3.1 $\mathbb{Q}$ non è completo.

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non è completo.

Resta l'ultimo argomento di questa prima parte: le serie a termini qualunque. Vogliamo dare un senso all'espressione $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

dove $a_n \in \mathbb{R}$. Ricordiamo che, se $\boxed{a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}}$, allora $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è definita come $\sup \left\{ \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k}_{S_n} : n \in \mathbb{N} \right\} < +\infty$
 $\in \mathbb{R}^+$

e (S_n) è monotona crescente, dunque $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \stackrel{(\text{teo 9.11.1})}{=} \lim S_n \in [0, +\infty]$.

Scopo: rimuovere l'ipotesi nell. rettangolo
a pag. 3

Def 14.4.1 Sia (a_n) una succ. di
numeri reali, e poniamo $S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \forall n \in \mathbb{N}$.

Dico che la serie degli a_n converge

se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n \in \mathbb{R}$,

e tale limite verrà indicato con

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n ;$$

Se $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ dico che la serie è
indeterminata;

Se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ dico che la
serie diverge a $+\infty$;

Se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$ dico che la
serie diverge a $-\infty$.

Def 14.5.1 Sia (a_n) una m.c. reale.
Dico che la serie degli a_n converge
assolutamente se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$$

serie a termini non negativi,
in la quale valgono tutti i risultati
delle lezioni 6, 7 ecc.

« In questa teoria delle serie a termini

qualunque, il caso migliore è
quando la serie converge assoluta
mente. Vedremo infatti che se
una serie converge assolutamente
allora converge; il contrario in genera-
le non è vero, cioè esistono serie
convergenti, ma non assolutamente
convergenti: questo è il caso + interessante
ma + difficile ».

A volte si trova la seguente definizione,
non strettamente necessaria

Def 14.6.1. Si dice che la serie ^{degli a_n} converge
condizionatamente se converge, ma

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty.$$

Che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty.$$

Ricordiamo Teo 7.6.1:

$$a_n \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

(e in generale il viceversa è falso)

Questo vale ancora nel caso di oggi nel teorema che segue:

Teo 14.6.1 Sia (a_n) una succ. reale.

Allora

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Dim $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\downarrow \quad \searrow S \in \mathbb{R}$$

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

prima oss. pag 9
lettura 10.

$$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_{n+1} - S_n) = S - S = 0$$

Vediamo la giustificazione di una delle affermazioni a pag 5.

Il seguente teorema mostra una proprietà interessante di $\mathbb{R}$.

Teo 14.7.1. I seguenti due fatti sono equivalenti.

1) Sia (a_n) succ. reale;

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \implies \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$$

2) Se (a_n) è di Cauchy, allora

(a_n) converge a un numero reale (cioè $\mathbb{R}$ è completo).

Prima di fare la dim. osserviamo che

2) è sempre verificato (è la seconda Difficile del teo 13.12.1, di cui abbiamo fatto due dimostrazioni).

Deduciamo che, se vale teo 14.7.1,

siccome 2) è vera, allora 1) è

vera, cioè le serie assd. convergenti sono convergenti.

Dm 2) $\Rightarrow$ 1)

Supponiamo 2), e sia $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$

Considero $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Voglio dimostrare che (S_n) converge a un numero reale.

Dall'ipotesi 2), basta vedere che (S_n) è di Cauchy.

Sia $n \in \mathbb{N}$, sia $k \in \mathbb{N}$

$$|S_{n+k} - S_n| = \left| \sum_{j=1}^{n+k} a_j - \sum_{j=1}^n a_j \right|$$

$$= \left| \sum_{j=n+1}^{n+k} a_j \right| \leq \sum_{j=n+1}^{n+k} |a_j|$$

↑
proprietà triangolare di $|\cdot|$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} |a_j| < +\infty$$

↑
per ipotesi

Fisso $\varepsilon > 0$, c'è solo $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\left. \sum_{j=n_\varepsilon+1}^{+\infty} |a_j| < \varepsilon \right\} \text{ (4.8.1)}$

« Se ho una serie a termini positivi, le code possono essere rese piccole quanto si vuole »

Dimostriamo la (14.8.1)

$$S := \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n, \quad \sigma_n = \sum_{j=1}^n |a_j|$$

$S = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n$ vuol dire

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \quad |S - \sigma_n| < \varepsilon$$

$$\text{Osservo che } |S - \sigma_n| = S - \sigma_n = \sum_{j=n+1}^{+\infty} |a_j|$$

Dunque

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > N_\varepsilon \quad \sum_{j=n+1}^{+\infty} |a_j| < \varepsilon,$$

che mostra la (14.8.1).

Fissiamo $\varepsilon > 0$, prendiamo n_ε dato dalla (14.8.1), e ha $n \in \mathbb{N}$, $n > n_\varepsilon$, $k \in \mathbb{N}$.

Otteniamo

$$|s_{n+k} - s_n| \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} |a_j| < \varepsilon$$

posto $m = n+k \in \mathbb{N}$; poiché $n > n_\varepsilon$ anche $m > n_\varepsilon$.

Deduco: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n, m > n_\varepsilon$

si ha $|s_m - s_n| < \varepsilon$, cioè (s_n) è di Cauchy.

Non servirebbe, ma facciamo anche la 10

dim di: $1) \Rightarrow 2)$

Per ipotesi $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R}$.

Demo dim. che se (a_n) è di Cauchy, allora converge a un numero reale.

Essere di Cauchy significa

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall m, n > \bar{n}_\varepsilon \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

$$\varepsilon = 1 \quad \exists \bar{n}_1 \in \mathbb{N} : \forall m, n > \bar{n}_1 \quad |a_n - a_m| < 1$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \quad \exists \bar{n}_2 > \bar{n}_1 : \forall m, n > \bar{n}_2 \quad |a_n - a_m| < \frac{1}{2}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2^k} \quad \exists \bar{n}_k > \bar{n}_{k-1} \quad \forall m, n \geq \bar{n}_k \quad |a_n - a_m| < \frac{1}{2^k}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_{\bar{n}_{k+1}} - a_{\bar{n}_k}| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty$$

$$\stackrel{1)}{\Rightarrow} \sum_{k=1}^{+\infty} (a_{\bar{n}_{k+1}} - a_{\bar{n}_k}) \in \mathbb{R}.$$

$$\stackrel{=}{=} \text{limite somme partielle } D_k = \sum_{j=1}^k (a_{\bar{n}_{j+1}} - a_{\bar{n}_j})$$

$$D_k = (a_{\bar{n}_2} - a_{\bar{n}_1}) + (a_{\bar{n}_3} - a_{\bar{n}_2}) + \dots + (a_{\bar{n}_{k+1}} - a_{\bar{n}_k})$$

14

Dunque $\exists$ finito n $a_{\overline{n}_{k+1}}$
 $k \rightarrow +\infty$

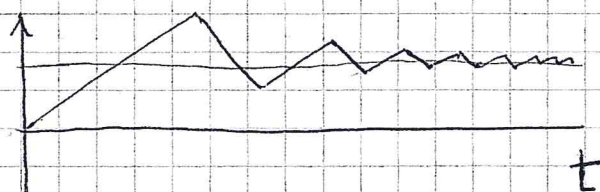
Siamo nelle seguenti condizioni:

(a_n) di Cauchy

$(a_{\overline{n}_{k+1}})$ convergente a un numero reale.

Così abbiamo una succ. di Cauchy
avente una sottosucc. convergente
a un numero reale. Dal punto 3)
di pagina 1, tutta la successione
converge a quel numero reale.

ES 16.11.1 Supponiamo di avere una
pallina che per 1 secondo si muove
con velocità 1 verso l'alto, poi per
 $\frac{1}{2}$ secondi si muove con velocità 1
verso il basso, poi per $\frac{1}{3}$ secondi si
muove con vel. 1 verso l'alto ecc. ecc.



spazio incasso $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

non è assolutamente convergente

verremo che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \in \mathbb{R}$.

(il teo 14.6.1 non ci serve qui)

ES 14.12.1 Sia $\alpha > 1$ Dimostrare

che $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \in \mathbb{R}$.

ES 14.12.2 Discutere la convergenza
al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ di

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$$

(non ci sono ancora tutti gli strumenti
per farlo, probabilmente).