

Teo. 13.11 (B.W). Sia (a_n) una succ.
di numeri reali, tale che $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

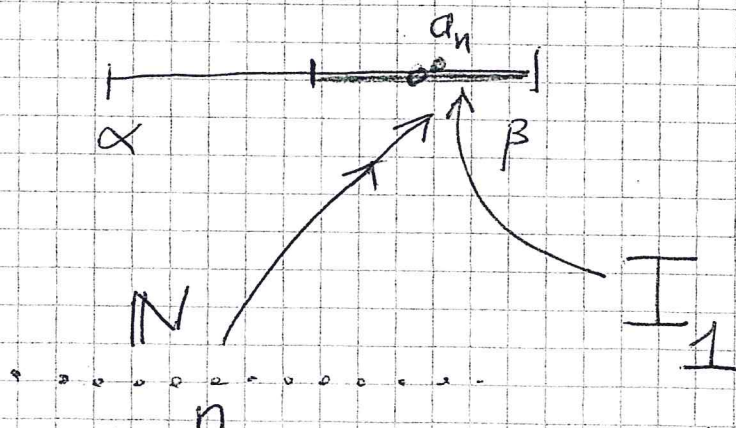
$$\alpha \leq a_n \leq \beta \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora (a_n) ammette una sottosucc.
convergente a un numero p con

$$\alpha \leq p \leq \beta.$$

Dm Sia $I_0 = [\alpha, \beta]$. Dividiamo I_0
in 2 parti uguali, e prendiamo una
delle due metà di I_0 , chiamiamola
 I_1 , in la quale

$\exists$ infiniti indici $n_1 \in \mathbb{N}$: $a_{n_1} \in I_1$



Ripeto il ragionamento con al posto di
 I_0 metto I_1 , e al posto di (a_n) metto (a_{n_1}) e
così via.

Sia ora I_2 ; in lo quale $\exists$ un certo
indice $n_2 \in \mathbb{N}$ (della successione (a_n))

in cui $a_{n_2} \in I_2$

Notiamo che (a_{n_2}) è una sotto succ.
di (a_{n_1}) , la quale è a sua volta una
sotto succ. di (a_n) . Dunque (a_{n_2}) è una
sotto succ. di (a_n) .

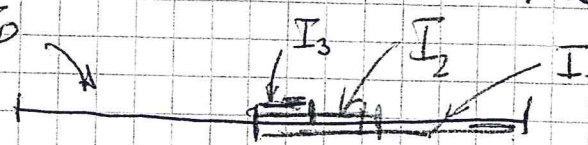
Dico che $\forall k \in \mathbb{N}$ posso costruire
una succ. (n_k) di numeri naturali;
e posso costruire un intervallo I_k :

$$I_k \subset I_{k-1}$$

$\exists$ infiniti indici $n_k \in \mathbb{N}$: $a_{n_k} \in I_k$

$$(n_k) \subset (n_{k-1})$$

Si dimostra per induzione su k : il
passo $1=k$ è fatto prima; e il passo k
segue con la stessa dimostrazione


$$I_k^{\text{def}} = [\alpha_k, \beta_k]; \quad \text{length}(I_k) = \beta_k - \alpha_k = \frac{\beta - \alpha}{2^k}$$

$$\text{length}(I_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

(α_k) e (β_k) hanno una particolare

proprietà: evidentemente, poiché

$$\alpha \leq \alpha_k \leq \beta, \quad \alpha \leq \beta_k \leq \beta,$$

si ha che (α_k) e (β_k) sono limitate.

Inoltre: (α_k) è crescente

(β_k) è decrescente.

Dal teo. 9.11.1.

$$\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k \in [\alpha, \beta]$$

$$\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k \in [\alpha, \beta]$$

$$\text{Ma } (\beta_k - \alpha_k) \rightarrow 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \alpha_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \beta_k =: p$$

Evidentemente $p \in [\alpha, \beta]$.

Resta da trovare una sottosucc. di (a_n) convergente a p .

$\forall k \in \mathbb{N}$ definisco

$$n_k := \min \{ n \in \mathbb{N} : n > n_{k-1}, a_n \in I_k \}$$

Dss: il minimo esiste, perché sto facendo il minimo di un sottoinsieme $\neq \emptyset$ di numeri naturali. Per costruzione ho

$$n_k > n_{k-1}$$

Quindi (a_{n_k}) è una sottosucc. di (a_n)

Dico che (a_{n_k}) converge a p . Siccome $a_{n_k} \in I_k$ si ha

$$\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k$$

Ma $\alpha_k \rightarrow p$, $\beta_k \rightarrow p \Rightarrow$ dal te

del confronto anche (a_{n_k}) converge,

e converge a p . $\square$

Def 13.6.1 Sia $K \subseteq \mathbb{R}$. K si dice

(sequenzialmente) compatto ^{in $\mathbb{R}$} se data una successione

(a_n) di elementi di K , essa ammette una sottosucc. convergente a un elemento di K .

Teo di B.W. si trova scritto come segue!

157

Teo 13.5.1 Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$.

Allora $[\alpha, \beta]$ è (sequenz.) compatto in $\mathbb{R}$

Def 13.5.1 Sia $C \subseteq \mathbb{R}$. C si dice
(seq.) chiuso $\checkmark$ in $\mathbb{R}$ data una succ. $\checkmark$ di elementi
di C , con (a_n) convergente a $l \in \mathbb{R}$,
allora $l \in C$.

Oss 13.5.1 Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \leq \beta$

Allora $[\alpha, \beta]$ è chiuso in $\mathbb{R}$.

$$\alpha \leq a_n \leq \beta \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow$$
$$l$$

teo calcolato

$\Rightarrow$

$$\alpha \leq l \leq \beta$$

Oss 13.5.2 $[\alpha, \beta)$ non è (seq.) chiuso in

$\mathbb{R}$ (con $\alpha < \beta$)

Def 13.5.2 Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. A si dice

(seq.) aperto $\checkmark$ se $\mathbb{R} \setminus A$ è (seq.) chiuso $\checkmark$ in $\mathbb{R}$

Oss 13.5.3 B.W dice che I è un intervallo

(seq.) chiuso e limitato di $\mathbb{R} \Rightarrow I$ è (seq.) compatto in $\mathbb{R}$

ES 13.6.0 $\mathbb{R}$ è compatto? NO $\Rightarrow$ tutte le sue sottosec. convergono a $+\infty \notin \mathbb{R}$

$\emptyset$ è compatto? Sì

(non c'è alcuna condizione da verificare)

$\mathbb{R}$ è chiuso ^{in $\mathbb{R}$} ? Sì

$\emptyset$ è chiuso in $\mathbb{R}$? Sì

ES 13.6.1 Sia $E \subseteq \mathbb{R}$

E compatto ^{di $\mathbb{R}$} $\Rightarrow E$ chiuso in $\mathbb{R}$

Il viceversa non è nec. vero.

Sia E compatto. Voglio dire che E è chiuso. Sia (a_n) una succ. di elementi

di E , $a_n \rightarrow l$. Siccome E è compatto,

$\exists (a_{n_k})$ ^{sottosec. di (a_n)} con $a_{n_k} \rightarrow p \in E$. Ma

poiché $a_n \rightarrow l \Rightarrow p = l$. Dunque $l \in E$.

« In $\mathbb{R}$ COMPATTO $\Rightarrow$ CHIUSO »

$\mathbb{R}$ è chiuso (in $\mathbb{R}$) ma non è compatto. $\square$

Se al posto di $\mathbb{R}$ considero $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ le cose cambiano; $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ è compatto (dal tes 11.6.1)

$\mathbb{R}$ è aperto in $\mathbb{R}$? Sì

$\emptyset$ è aperto in $\mathbb{R}$? Sì

Diunque $\mathbb{R}$ e $\emptyset$ sono aperti e chiusi in $\mathbb{R}$.

(a, b) con $-\infty < a < b < +\infty$
è aperto in $\mathbb{R}$? Sì (esercizio)

$[a, b]$ con $-\infty < a < b < +\infty$

non è aperto né chiuso in $\mathbb{R}$.

$\mathbb{Q}$ è aperto in $\mathbb{R}$? No

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è chiuso in $\mathbb{R}$? No

(ricordare che i razionali e gli irrazionali
sono densi in $\mathbb{R}$)

$\mathbb{Q}$ non è chiuso in $\mathbb{R}$

Def 13.7.1 (semplificata). Sia $x_0 \in \mathbb{R}$

Un intorno di x_0 è un intervallo

aperto della forma $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
per un certo $\delta > 0$

Nota gli intorno di $+\infty$ sono $(\lambda, +\infty]$
con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio importante 13.8.1.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$. Allora

A è aperto in $\mathbb{R}$ se e solo se

$$\forall x_0 \in A \quad \exists \delta > 0 : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A.$$

Def. 13.8.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$.

Un punto $x_0 \in E$ si dice interno ad E se $\exists$ un intorno di x_0 tutto contenuto in E .

Def 13.8.2 La parte interna di E , indicata con $\overset{\circ}{E}$, è l'insieme dei punti interni ad E .

ES 13.8.2 A è aperto in $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{c} \Updownarrow \\ A = \overset{\circ}{A} \end{array}$$

Def 13.8.3

Sia $E \subseteq \mathbb{R}$

si dice chiusura di E in $\mathbb{R}$, e indica con $\bar{E}$, l'insieme di tutti i limiti ^{reali} di successioni di punti di E .

Nota $\bar{E} \supseteq E$

$$E = [a, b) \Rightarrow \bar{E} = [a, b]$$

$$E = (-\infty, a) \Rightarrow \bar{E} = (-\infty, a]$$

$$E = \mathbb{Q} \Rightarrow \bar{E} = \mathbb{R}$$

$$E = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow \bar{E} = \mathbb{R}$$

Es 13.9.1. $E \subseteq \mathbb{R}$ è chiuso in $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow E = \bar{E}$$

Teo 13.9.1 (Cesàro) Sia (a_n) una
succ. di numeri reali. Se

$$a_n \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$$

allora la successione (m_n) converge
a l , dove

$$m_n = \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_n)$$

Oss 13.9.1. IP ho non è unita, se ho
 (a_n) tale che $m_n \rightarrow l$, non

è detto che $a_n \rightarrow l$. Esempio:

$$a_n = (-1)^n, \text{ ma } m_n \rightarrow 0$$

Def (teo 13.9.1). Consideriamo il caso
 $l \in \mathbb{R}$, gli altri con l fanno in modo
 simile. Dimostriamo ^{un po' di più, cioè} che in generale

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \quad (13.10.1)$$

sempre vera

non ovvie

Se per dimo sto la (13.10.1), dall'ipotesi
 che (a_n) converge, deduco

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n,$$

e dunque le disuguaglianze nelle (13.10.1)
 sono tutte eguaglianze. Dunque

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} s_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} s_n$$

(dal teo 9.7.1)

Dunque (s_n) converge, e converge allo
 stesso limite di (a_n) .

Poniamo $l^+ := \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$

Da lemma 9 pag. 1,

11

$$\forall \varepsilon > 0$$

$$a_n < l^+ + \varepsilon \quad \text{def. in n}$$

$$l^+ - \varepsilon < a_n$$

freg. in n.

Dalla prima delle due,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \forall n > \bar{n} \quad a_n < l^+ + \varepsilon$$

$$\text{Se } n > \bar{n} \quad \text{ho}$$

$$m_n = \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_n)$$

$$= \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_{\bar{n}}) + \frac{1}{n} (a_{\bar{n}+1} + \dots + a_n)$$

$$\leq \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_{\bar{n}}) + \frac{1}{n} (l^+ + \varepsilon) (n - \bar{n})$$

$$= \frac{1}{n} (a_1 + \dots + a_{\bar{n}}) + (l^+ + \varepsilon) \frac{n - \bar{n}}{n}$$

$$\Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} m_n \leq 0 + (l^+ + \varepsilon) \cdot 1 = l^+ + \varepsilon$$

Prendendo $\varepsilon = \frac{1}{k}$, e mandando $k \rightarrow +\infty$

si ottiene

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} m_n \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(l^+ + \frac{1}{k} \right) = l^+$$

Una dimostrazione simile si usa per dim. che

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} m_n.$$

□

SUCCESSIONI DI CAUCHY

Def 13.12.1. Sia (a_n) una successione di numeri reali o complessi. Si dice che (a_n) è di Cauchy se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \text{ tale che}$$

$$\forall n, m > \bar{n} \text{ si ha } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

In questa def non compare mai il «estremo» come nella Def 9.2.1; d'altra parte ci sono due indici m, n «in gioco».

Teo 13.12.1 Sia (a_n) una succ. di numeri reali. Allora

$$(a_n) \text{ di Cauchy} \Rightarrow (a_n) \text{ converge a un numero reale.}$$

Vale anche il viceversa, cioè

Dim Vediamo prima la parte facile $\Leftarrow$. 13

• Supponiamo $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$

Fissiamo $\varepsilon > 0$; prendiamo $\bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$
tale che $\forall n > \bar{n}: |a_n - l| < \varepsilon$

Se $m, n \in \mathbb{N}$, $m > \bar{n}$, $n > \bar{n}$ si ha

$$|a_n - a_m| = |a_n - l + l - a_m|$$

$$\leq |a_n - l| + |a_m - l| < 2\varepsilon.$$

Vediamo adesso la peccia difficile $\Rightarrow$.

Sia (a_n) di Cauchy. Oservero che
 (a_n) è limitata; infatti se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) : \forall n, m > \bar{n} \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

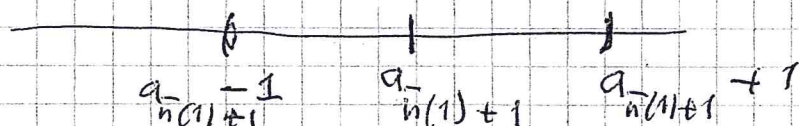
posso prendere $\varepsilon = 1$. Allora $\exists \bar{n}(1) \in \mathbb{N}$

$$\forall n, m > \bar{n}(1) \quad |a_n - a_m| < 1$$

In particolare prendo $m = \bar{n}(1) + 1$

$$|a_n - a_{\bar{n}(1)+1}| < 1 \quad \forall n > \bar{n}(1)$$

Quindi $\text{dist}(a_n, a_{\bar{n}(1)+1}) < 1$. (13.13.1)



14
 Siccome gli indici in $\mathbb{N}$ prima di $\bar{n}(1)+1$ sono un numero finito, dalla (13.13.1) segue che (a_n) è limitata.

Dunque $l^- = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \in \mathbb{R}$

$l^+ = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \in \mathbb{R}$

Per ipotesi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \quad \forall n, m > \bar{n}(\varepsilon)$$

$$a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon$$



$$\forall \varepsilon > 0$$

$$\sup_{k > \bar{n}(\varepsilon)} a_k \leq a_m + \varepsilon$$



$$\forall \varepsilon > 0 \quad a_m - \varepsilon \leq \inf_{k > \bar{n}(\varepsilon)} a_k$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}(\varepsilon) : \quad \forall m > \bar{n}(\varepsilon)$$

$$a_m - \varepsilon \leq \inf_{k > \bar{n}(\varepsilon)} a_k \leq \sup_{k > \bar{n}(\varepsilon)} a_k \leq a_m + \varepsilon$$

$\Downarrow$

dato che (b_n) è crescente
e (c_n) è decrescente

$$a_m - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq a_m + \varepsilon$$

$\Downarrow$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n - \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq 2\varepsilon$$

Poiché questo è vero $\forall \varepsilon > 0$ deduco

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n$$

$\Rightarrow (a_n)$ converge.

ES. 13, 15, 1

mc. reali.

di (a_n) mg
Altra

P

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k > n} a_k$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k > n} a_k$$