

Lezione 12 25/10/18

g-11

1

ES 12.1.1. Trovare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha} \quad \forall \alpha > 1$$

ES 12.1.2 Trovare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^n \quad \forall \alpha > 1$$

ES 12.1.0 $\forall a > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

ES 12.1.3 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Per concludere la dimostrazione sui teoremi 10.14.1 (rapporto) e 10.14.2 (radice);

tenere ^{12.1.1} (rapporto $\rightarrow$ radice) Sia (a_n) seq. reale di numeri positivi.

Se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ allora

$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ e tali limiti sono

uguali.

Nota il viceversa non è nec. vero

L'esempio è dato dall'esempio 7.6.1,

3

dove (a_n) è tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}, \quad \text{ma} \quad \nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Se $a_n = \sqrt[n]{n}$ e tenuto il criterio del rapporto, $\sqrt[n]{\frac{a_{n+1}}{a_n}} \rightarrow 1$, esula dal criterio del rapporto.

ES (Soluzione es. 12.1.3) ↓

$$a_n := n$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

teo 12.1.1.

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log(n)}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log n}$$

basta capire cosa fa $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n} = 0$

$$\ll e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log n}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log n}{n}} \gg$$

tipica proprietà delle funzioni

continue (che non abbiamo ancora fatto), come $x \rightarrow e^x$

$$\text{Se } a > 1 \quad \sqrt[n]{a} \rightarrow 1$$

3

$$a > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{a} > 1 \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} - 1 > 0$$

$$x_n = \sqrt[n]{a} - 1 \quad \text{Da Bernoulli I sappiamo}$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Lo applico con $x = x_n$

$$(1+x_n)^n \geq 1+nx_n$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{a}}\right)^n \geq \frac{1}{a}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$0 < x_n \leq \frac{a-1}{n}$$

$$\Rightarrow \text{teo sandwich} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Voglio fare lo stesso per $\sqrt[n]{n}$; al posto di a metto n , e trovo

$$0 < x_n \leq \frac{n-1}{n}$$

$$\searrow 1$$

e dunque non posso dedurre che $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$,

ma se anche tale limite esistesse, allora

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \leq 1$$

Bernoulli II:

4

1a $(1+x)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x^2 \quad \forall x > 0, n \in \mathbb{N}$

= L'a Applico ^(la scelta 2) con $x = x_n = \sqrt[n]{n} - 1 > 0$

$$\left(\sqrt[n]{n} \right)^n \geq 1 + \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$$

n

1a $\Rightarrow 0 \leq x_n^2 \leq \frac{2(n-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n}$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n^2 = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$$

$$x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Dim (teo 12.1.1) Per ipotesi

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Supponiamo $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in (0, +\infty)$

(gli altri casi saranno simili). Allora

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n} \\ l - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$$

$$\text{(con } \varepsilon < l) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > \bar{n}$$

$$(l - \varepsilon) a_n < a_{n+1} < (l + \varepsilon) a_n$$

$$(l - \varepsilon) a_{\bar{n}+1} < a_{n+1} < (l + \varepsilon) a_{\bar{n}+1}$$

$$(l - \varepsilon) \sqrt[n+1]{a_{\bar{n}+1}} < \sqrt[n+1]{a_{n+1}} < (l + \varepsilon) \sqrt[n+1]{a_{\bar{n}+1}}, \quad \forall n > \bar{n}$$

$\downarrow n \rightarrow \infty \quad \downarrow n \rightarrow \infty \quad \downarrow n \rightarrow \infty \quad \downarrow n \rightarrow \infty$
 $l - \varepsilon \quad 1 \quad l + \varepsilon \quad 1$

Ne segue che $\forall \varepsilon > 0, \varepsilon < l$

$$(l - \varepsilon) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{n+1}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{n+1}} \leq l + \varepsilon$$

Prendendo $\varepsilon = \frac{1}{k}$ e mandando $k \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow l \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{n+1}} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{n+1}} \leq l$$

Quindi queste diseg. sono tutte = e dunque
dal teo 9.7.1

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

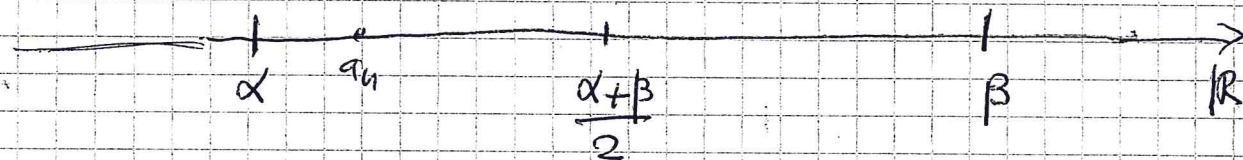
Teo 12.6.1 (B.W.) Sia (a_n) succ. di
 numeri reali, $\alpha \leq \beta$ numeri reali,

$$\alpha \leq a_n \leq \beta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora (a_n) ammette una sottosuccessione
 convergente a un numero p con

$$\alpha \leq p \leq \beta.$$

Dim Metodo di bisezione:



Dico che esistono infiniti indici $n \in \mathbb{N}$
 per cui a_n appartiene a almeno una delle
 due metà dell'intervallo $[\alpha, \beta]$,
 cioè almeno $a \in [\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ o $a \in [\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$

$\exists$ infiniti indici $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \in [\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}] \text{ oppure } a_n \in [\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta]$$

In fatti, se lo studio finiti sono gli $n \in \mathbb{N}$

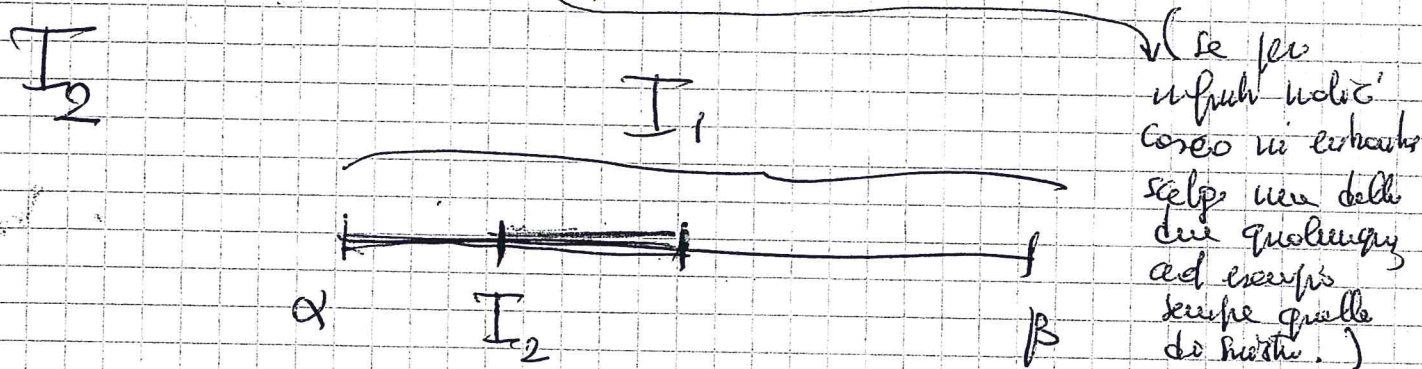
per cui $a_n \in [\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}]$ e " " " "

" " $a_n \in [\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta] \Rightarrow$ " " " " $n \in \mathbb{N}$

per cui $\alpha_n \in [\alpha, \beta] \Rightarrow \mathbb{N}$ è un insieme finito, assurdo.

Roviamo $I_1 = [\alpha, \beta]$. Dunque

infiniti sono gli indici $n_1 \in \mathbb{N}$ tali che q_{n_1} appartiene a una delle due metà di I_1 . Prendiamo una di queste due metà, e chiamiamola



Dividiamo I_2 in due metà: con lo stesso ragionamento, infiniti sono gli indici n_2 : tra gli n_1 di prima per cui q_{n_2} c'è una di quelle due metà di I_2 . Dalla successione di indici (n_1) estraggo dunque una sottoseq. di indici $(n_2) \subset (n_1)$ tale che q_{n_2} appartiene a una delle due metà di I_2 . Ma