

Lezione 11

24/10/18

10.13

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty$$

Poniamo $a_n = \frac{n^n}{n!}$ e cerchiamo di usare teo 10.14.1 (del rapporto)

«quando ci sono i fattoriali è spesso conveniente tentare teorema del rapporto»

$$\begin{aligned} a_n > 0 \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e > 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Teo 10.14.1} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$$

Dim (teo 10.14.1): $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1 \text{ def. n}$

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n > N \text{ si ha } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$$

$$0 < a_{n+1} \leq q a_n \leq q^2 a_{n-1} \leq \dots \leq q^{n-N} a_N$$

(da dim. per induzione su n).

$$q < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} q^{n-N} = 0 \quad \text{teo 10.11.1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (q^{n-N} a_N) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

Se $q > 1$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq \frac{1}{q}$$

basta applicare il caso precedente
con $\frac{1}{a_n}$ al posto di a_n , e $\frac{1}{q} < 1$
al posto di q .

□

La ditta dice 10.14.2 per ora.

ES 1121.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n!)^{n-1} - ((n-1)!)^n}{((n-1)! (n-10))^{n-1}} \\ \rightarrow = \frac{(n(n-1)!)^{n-1} - ((n-1)!)^{n-1+1}}{((n-1)! (n-10))^{n-1}} \\ = \frac{((n-1)!)^{n-1} [n^{n-1} - (n-1)!]}{((n-1)!)^{n-1} (n-10)^{n-1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{n^{n-1} - (n-1)!}{(n-10)^{n-1}}$$

$$= \frac{n^{n-1} \left(1 - \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \right)}{(n-10)^{n-1}}$$

$$= \left(\frac{n}{n-10} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \right)$$

$$= \left(\frac{n-10+10}{n-10} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \right)$$

$$= \left(1 + \frac{10}{n-10} \right)^{n-1} \left(1 - \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \right)$$

$$= \left(1 + \frac{10}{n-10} \right)^{n-10+9} \left(1 - \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \right)$$

$$= \left(1 + \frac{10}{n-10} \right)^{n-10} \underbrace{\left(1 + \frac{10}{n-10} \right)^9}_{g \text{ malte}} \cdot \left(1 - \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \right)$$

g malte

Se $a_n \rightarrow a$, $b_n \rightarrow b \Rightarrow a_n b_n \rightarrow ab$
 provided a_n and $b_n \neq \infty, 0$

$$\text{Se } n-10 = m$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{10}{n-10} \right)^{n-10} =$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{10}{m} \right)^m = e^{10}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{10}{n-10} \right) = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \right) = 1$$

Risultato : il limite cercato è e^{10} .

Esercizio 10.15.3 :

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos(a_n)}{(a_n)^2} &= \frac{(1 - \cos(a_n)) / (1 + \cos(a_n))}{(a_n)^2 (1 + \cos(a_n))} \\ &= \frac{1 - (\cos(a_n))^2}{(a_n)^2 (1 + \cos(a_n))} = \frac{(\sin(a_n))^2}{(a_n)^2 (1 + \cos(a_n))} \\ &= \left(\frac{\sin(a_n)}{a_n} \right)^2 \frac{1}{1 + \cos(a_n)} \rightarrow 1^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Resta da dimostrare $\frac{\sin(a_n)}{a_n} \rightarrow 1$

5

Vedi percorso $|x| < \pi/2$, $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

$$\Rightarrow \cos(a_n) < \frac{\sin(a_n)}{a_n} < 1 \quad \text{def w'n}$$

(perché $a_n \rightarrow 0 \Rightarrow |a_n| < \pi/2$ def w'n)

Del percorso del confronto 10.11.1

perché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(a_n) = 1$, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(a_n)}{a_n} = 1. \quad \square$$

Def 11.5.1 (Sottosequenza). Sia (a_n)

una successione di numeri reali o complessi.

Una sottosequenza di (a_n) è

una successione della forma $(a_{\sigma(n)})$

dove $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ è

una funzione strettamente crescente.

Esempio 11.5.1

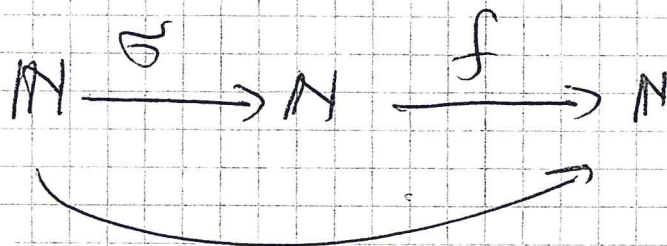
$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots$

una sottosec.
($\sigma(n) = 2n$)

$a_2, a_4, a_6, a_8, \dots$

$$a_n = f(n), \quad f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a_{\sigma(n)} = f(\sigma(n)),$$



$f \circ \sigma$ sotto successione.

Es 11.6.1 Se $(a_n) \rightarrow l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
allora qualunque sotto successione di (a_n)
converge anch'essa a l .

Che succede quando (a_n) non ha limiti?

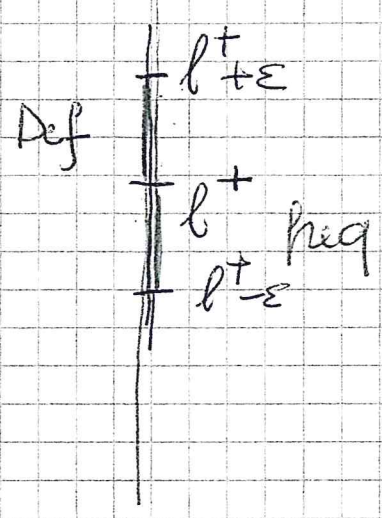
Sappiamo che $\exists l^-, l^+ \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Teo 11.6.1 Sia (a_n) una succ. di
numeri reali. Allora (a_n) ammette
una sotto succ. convergente a l^- e
una sotto succ. convergente a l^+ .

In particolare, se (a_n) è limitata,
essa ammette sempre una sotto successione
convergente a un numero reale.

Def Supponiamo di considerare l^+ .

Supponiamo $l^+ \in \mathbb{R}$.



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n}_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n > \bar{n} \quad a_n < l_{+\varepsilon}^+$$

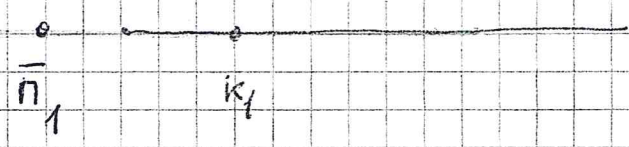
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists k \in \mathbb{N} \quad k > N \quad a_k > l_{-\varepsilon}^+$$

$$\varepsilon = 1 \quad \exists \bar{n}_1 : \forall n > \bar{n}_1 \quad a_n < l_{+1}^+$$

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists k_1 \in \mathbb{N} \quad k_1 > N \quad a_{k_1} > l_{-1}^+$$

Posso scegliere un indice $h_1 \in \mathbb{N}$?

$$l_{-1}^+ < a_{h_1} < l_{+1}^+$$



$$\varepsilon = 1/2 \quad \exists \bar{n}_2 > \bar{n}_1 \quad \forall n > \bar{n}_1 \quad a_n < l_{+1/2}^+$$

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \exists k_2 \in \mathbb{N} \quad k_2 > N : a_{k_2} > l_{-1/2}^+$$

$$\exists h_2 \in \mathbb{N} : \left| l_{-1/2}^+ < a_{h_2} < l_{+1/2}^+ \right| \text{ e molto}$$

posto scegliere $h_2 > h_1$. Prosegue con 8

10 $\varepsilon = \frac{1}{m}$, $m \in \mathbb{N}$ (per indurre su m)

e trova $h_m \in \mathbb{N}$ $h_m > h_{m-1}$

per cui

$$l^+ - \frac{1}{m} < a_{h_m} < l^+ + \frac{1}{m}$$

10 In definitiva, ho costruito una
successione di indici $m \in \mathbb{N} \rightarrow h_m \in \mathbb{N}$
st. crescente ($h_m > h_{m-1}$) per cui

$$\forall m \in \mathbb{N} \quad l^+ - \frac{1}{m} < a_{h_m} < l^+ + \frac{1}{m}$$

10 Per il criterio del confronto

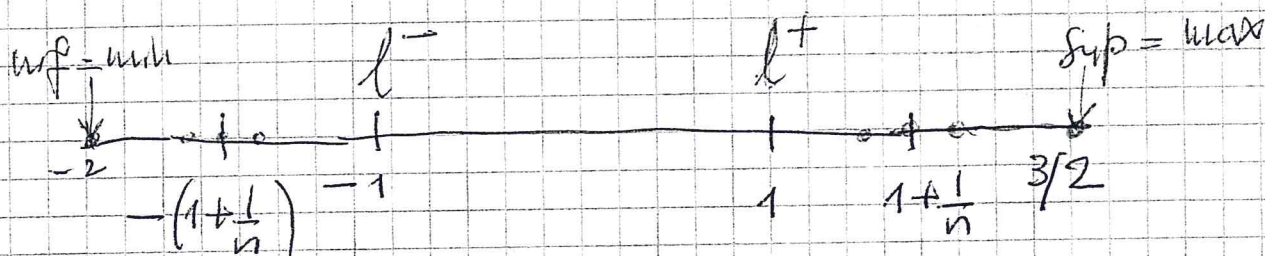
$$\lim_{m \rightarrow +\infty} a_{h_m} = l^+$$

e (a_{h_m}) è la sotto succ. cercata.

10 Se $l^+ \in \{\pm \infty\}$ è più facile
(cosa). Il caso per l^- è analogo. $\square$

Es 11.9.1 $a_n = (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$$= \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} & n \equiv 0 (2) \quad (n \text{ pari}) \\ -\left(1 + \frac{1}{n}\right) & n \equiv 1 (2) \quad (n \text{ dispari}) \end{cases}$$



~~$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$~~

$$l^- = -1, \quad l^+ = 1$$

$$\sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \max \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = 3/2$$

$$\inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = \min \{a_n : n \in \mathbb{N}\} = -2$$

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \sup f(\mathbb{N}), \quad \inf f(\mathbb{N})$$

$$(a_{2n}) \text{ sotto successione convergente a } l^+$$

$$(a_{2n-1}) \quad " \quad " \quad " \quad l^-$$

Teo 11.10.1 (di Compattata, di 10

• Bolzano-Weierstrass)

Sia (a_n) una succ. di numeri reali, tali che $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta$

$$(11.10.1) \quad \alpha \leq a_n \leq \beta \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora (a_n) ammette una sotto succ. convergente a un numero p con $\alpha \leq p \leq \beta$

Dim 1ª dimostrazione come conseguenza del Teo. 11.6.1. Possiamo considerare ad esempio l^+ .

• Dato che vale (11.10.1), allora $\alpha \leq l^+ \leq \beta$. Infatti se si assume

$l^+ \notin [\alpha, \beta]$, allora

$l^+ \in [-\infty, \alpha)$, oppure $l^+ \in (\beta, +\infty]$

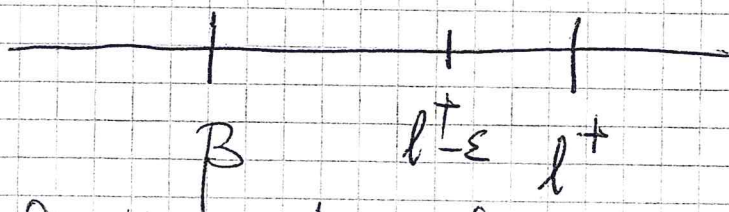
supponiamo

$l^+ \in (\beta, +\infty]$

e anche $l^+ \in (\beta, +\infty)$ ($l^+ = +\infty$ è più facile)

Scelgo $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < \frac{l^+ - \beta}{2}$

11



Per infiniti indici $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$a_n > l^+ - \varepsilon$$

(perché $a_n > l^+ - \varepsilon$ per q. d. n.)

Assumo anche $a_n \leq \beta \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Deduco

$$l^- \leq l^+ \leq \beta$$

Il teo 11.6.1 garantisce che

$\exists$ sottosuccessione di (a_n) convergente a l^+ , e questo conclude.

□

Questa dimostrazione è basata sulle proprietà di l^- e l^+ . Vediamo una dimostrazione senza l'uso di l^- e l^+ .

Esercizio 11.12.1

Siano $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$

$$V_k := \sum_{i=1}^k y_i \quad \forall k \geq 1$$

$$V_0 := 0$$

Allora vale la formula di sommazione d'Abel:

$$\sum_{i=m}^n x_i y_i = \sum_{i=m}^{n-1} (x_i - x_{i+1}) V_i + x_n V_n - x_m V_{m-1}$$

$$\forall m \in \{1, \dots, n-1\}$$

Da svolgere per induzione su n .

Questa è una versione discreta della formula di integrazione per parti.