

Lezione 10 23/10/18

14-17

1

Teo della volta scorsa: se (a_n) è
monotona, allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Se (a_n) è crescente (o strettamente
crescente) allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Se la successione è superiormente limitata,
allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n < +\infty$.

Poi c'è l'analogo quando (a_n) è
decrescente.

Teo (di permanenza del segno) 10.1.1

Se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \in (0, +\infty]$

allora $\exists q > 0 : a_n \geq q$ defn. in n .

Dim Consideriamo $\varepsilon > 0$ tale che,

detto $l := \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$, si abbia

$q := l - \varepsilon > 0$ (supponiamo $l < +\infty$,
se no è ancora più semplice). Ad esempio
basta prendere ε con $0 < \varepsilon < l$ ($\varepsilon = l/2$ va bene)

Nella def di limite,

$$a_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) \text{ def } \forall n.$$

Ma questo vuol dire

$$0 < \varepsilon := l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \text{ def } \forall n.$$

In particolare, segue la tesi. $\square$

ES 10.2.1 dimostrare che se (a_n) successione di numeri positivi, e $\exists q \in [0, 1)$ tale che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad (10.2.1)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n < +\infty.$$

$$\text{Se invece } \exists q > 1 : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q \quad (10.2.2)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty.$$

(stesso tipo di enunciato per $\sqrt[n]{a_n}$)

ES 10.2.2 Nella (10.2.1) basta $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$
e nella (10.2.2) basta $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$.

Es 10.3.1

Sia $n \in \mathbb{N}$

3

• Domanda

$$\sum_{n=1, n \neq m}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - m^2} < +\infty$$

Soluzione esercizio 9.10.1 :

$$\boxed{\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e} \quad (10.3.1)$$

Più in generale, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Vediamo la (10.3.1): Sia $n \in \mathbb{N}$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} 1^{n-k}$$

binomio Newton

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} =$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} =$$

Sono le

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(\frac{n}{n} \frac{(n-1)}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \right)$$

«mi ricorda e»

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \underbrace{1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{P_{k,n}}$$

$P_{k,n}$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{k,n} = (*)_n$$

La speranza è che quando $n \rightarrow +\infty$,
in qualche modo $(*)$ si comporti

come $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$.

$$P_{k,n} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall k \in \{0, \dots, n\}$$

$$(*)_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{Prima di continuare, vediamo il}$$

Teo 10.4.1 (Confronto). Sia $(a_n), (b_n)$

due succ. di numeri reali, tali che
 $a_n < b_n$ (oppure $a_n \leq b_n$) $\forall n \in \mathbb{N}$.

51

Allova se (a_n) e (b_n) ammettono limite, si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \quad (10.5.1)$$

Se non ammettono limite, allora

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

E siccome per caso.

Nota : il $\leq$ prima del limite si trasforma in $\leq$ nel limite (e non c'è niente da fare, se non ci sono informazioni in più)

Applichiamo questo al nostro caso:

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (*)_n \leq e. \quad (10.5.1)$$

Facciamo in realtà vedere che $(*)_n$ è crescente, dunque $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} (*)_n$. (teo iniziale della lezione)

$$(*)_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{k,n}. \text{ Dico che}$$

$$(*)_n < (*)_{n+1}, \text{ a\`e' dico che}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{k,n} < \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} P_{k,n+1} \quad (10.6.1)$$

$$P_{k,n} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$P_{k,n+1} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$$

Si vede subito che $P_{k,n+1} > P_{k,n}$

Dato che per la formula a destra nella (10.6.1) arriva addirittura a $n+1$ (mentre l'altra arriva a n), ne segue la (10.6.1).

Dunque $(*)_n$ è (strettamente) crescente.

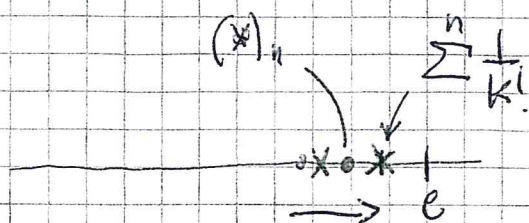
È dunque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (*)_n (= \sup \{ (*)_n : n \in \mathbb{N} \})$

perciò la (10.5.1) diventa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (*)_n \leq e$$

Ricapitolando: abbiamo dimostrato che

$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, e tale limite è $\leq e$



Resta da dimostrare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq e$

Osservo che se $m < n$ si ha

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} P_{k,n} < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{k,n}$$

Pensando m fissato, posso fare il $\lim_{n \rightarrow +\infty}$, e ho

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} P_{k,n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} P_{k,n} \quad (10.7.1)$$

||

$$\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{k,n}$$

esiste da quanto visto prima

$$P_{k,n} = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{k-1}{n}\right), \text{ se } k \text{ è fissato,}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_{k,n} = 1, \text{ Per essere precisi:}$$

$$\forall k \in \{0, \dots, n\} \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{k,n} = 1$$

$$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N}, m < n \quad \exists \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \lim_{n \rightarrow +\infty} P_{k,n} = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} P_{k,n} = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}$$

La (10.7.1) diventa $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}}_{\text{dipende solo da } m} \leq \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\text{non dipende da } m, \text{ non dipende da } n, \text{ è un numero reale}}$$

dipende solo
da m

non dipende da m
non dipende da n
è un numero reale

Passando al limite per $m \rightarrow +\infty$ e
deducendo, ricordando la definizione di e ,

$$e \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \square$$

In generale

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Quanto fatto finora è valido per $x=1$

ES (10.8.1). Abbiamo visto che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è
crescente e tende ad e . Vedere che

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è decrescente e tende a e .

Osservazioni utili: se $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$b_n \rightarrow b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$(a_n + b_n) \rightarrow a + b$$

$$(a_n - b_n) \rightarrow a - b$$

funche non succede
if caso $+\infty - \infty$

se $b_n \neq 0$ $b_n \rightarrow b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{a}{b}$$

se $a = +\infty$ e $b > 0 \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow +\infty$

eccetera in gli altri casi.

Tornando all'esercizio

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_e \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_1$$

Donque $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \rightarrow e$.

Cominciamo la dimostrazione che

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è decrescente. Dato dim.

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \stackrel{?}{<} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad \text{then}$$
$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \stackrel{?}{<} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\frac{(n+2)^{n+2}}{(n+1)^{n+2}} < \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \quad ?$$

$$n^{n+1} (n+2)^{n+2} < (n+1) \left((n+1)^2 \right)^{n+1} \quad ?$$

$$(n(n+2))^{n+1} (n+2) < (n+1) \left((n+1)^2 \right)^{n+1} \quad ?$$

$$\frac{(n+2)}{(n+1)} < \frac{\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right)^{n+1}}{1} \quad ?$$

< AVERE ESPONENTE

(n+1) COMUNE ... >>

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+1}$$

$$\frac{(n+2)}{(n+1)} < \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+1} \quad ?$$

Bernoulli I: $(1+x)^k \geq 1+kx$

$\forall k \in \mathbb{N}, \forall x > -1$. Si ha dunque

$$\left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)^{n+1} \geq 1 + \frac{(n+1)}{n(n+2)} > \frac{n+2}{n+1} \quad ?$$

$$(n+1)(n(n+3) + (n+1)) > n(n+2)^2 \quad ? \subseteq n^3 + 4n^2 + 4n$$

$$(n+1)(n^2 + 3n + 1) = n^3 + 4n^2 + 4n$$

11

ES 10.11.1 (una ^{prima} stima del fattoriale)

(10.11.0) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n^n}{e^n} \leq n! \leq \frac{n^n}{e^n} \cdot ne$

Se è vero, moltiplica

$$\frac{1}{e^n} \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{ne}{e^n} \quad (10.11.1)$$

Teo (dei 2 carabinieri). Se $(a_n), (b_n), (c_n)$ sono tali che

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{def in } n$$

$$a_n \rightarrow l$$

$$c_n \rightarrow l$$

$$\Rightarrow b_n \rightarrow l$$

con $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm \infty\}$.

Dim per cosa (confronto). $\square$

Dalla (10.11.1) deduco

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Dimostriamo ora la (10.11.0) per induzione su n .

$$n! \leq \frac{n^n}{e^n} n e \quad (10.12.1) \quad 12$$

$$n=1 \quad 1! \leq \frac{1^1}{e^1} e \quad \text{cioè} \quad 1 \leq 1 \quad \text{Sì}$$

Supponiamo (10.12.1), e dimostriamo

$$(n+1)! \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} (n+1) e \quad (10.12.2)$$

Scriviamo

$$(n+1)! = (n+1)n! \leq (n+1) \frac{n^n}{e^n} n e$$

$\uparrow$
 (10.12.1)

basta dire che

$$(n+1) \frac{n^n}{e^n} n e \stackrel{?}{\leq} \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} (n+1) e$$

$$n^{n+1} e \stackrel{?}{=} n^n n e \stackrel{?}{\leq} (n+1)^{n+1} e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

si dall'asserto 10.8.1.

Resta da dim.

14

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n^n}{e^n} \leq n!$$

induzione su n : $\frac{1^1}{e^1} \leq 1!$ s.

Supponiamo

$$\frac{n^n}{e^n} \leq n! \quad (10.13.1)$$

devo dim. $\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \leq (n+1)!$

Si ha

$$(n+1)! = (n+1)n! \geq (n+1) \frac{n^n}{e^n}$$

$\uparrow$
(10.13.1)

è dunque

$$(n+1) \frac{n^n}{e^n} \geq \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}} \quad \text{ho finito}$$

$$n^n \geq \frac{(n+1)^n}{e}, \quad \text{cioè}$$

$$e \geq \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{si perché}$$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ cresce e tende ad e .

Dal confronto possiamo dimostrare

14

Teo 10.14.1 (rapporto). Sia (a_n) una successione di numeri reali > 0 . Se $\exists q \in [0, 1)$

tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ def di n

allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Se invece $\exists q > 1$ tale che

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq q$ def di n,

allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

Teo 10.14.2 (radice). Sia (a_n) una succ di numeri reali > 0 . Se $\exists q \in [0, 1)$

tale che $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ def di n

allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Se invece $\exists q > 1$ tale che

$\sqrt[n]{a_n} \geq q$ def di n,

allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

ES 10.15.1

für $q > 1, h \in \mathbb{N}$

15

Beweisen da $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{q^n}{n^h} = +\infty$

ES

da $q > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{q^n} = 0$$

ES 10.15.2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^{100}} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^k} = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

ES 10.15.3 da $a_n \rightarrow 0, a_n \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a_n)}{a_n} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos(a_n)}{(a_n)^2} = \frac{1}{2}$$