

1) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{n-2} + (n-2)^n}{4(n^n) - 3(n!)}$$

2) Discutere il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)(2+\sin n)}{\sqrt[3]{n^5}}; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}; \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n) \left( \frac{1}{2} - n \frac{\ln n}{n} \right)^n$$

3) Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[ \log\left(\frac{1}{1-x}\right) - \exp x e^x \right]$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{8x^2 \cos(2x) - 2 \log(1+4x^2)}{7x^2 \tanh(x^4)}$$

4) Dare un esempio di una serie divergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \quad \text{con} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

5)  $\forall n \in \mathbb{N}$  poniamo  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ . Dimostrare che:

i)  $(S_n)$  non è di Cauchy

ii)  $\forall p \in \mathbb{N}$  si ha  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |S_{n+p} - S_n| = 0$

6) Dare un esempio di una serie convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \in \mathbb{R} \quad \text{e di una serie divergente} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$$

talché  $a_n \geq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .



7) Dimostrare che  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}$  non converge

8)  $\forall n \in \mathbb{N}$  poniamo  $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}$ . Calcolare

$$\sigma_n = \frac{S_1 + \dots + S_n}{n}$$

Esiste  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_n$ ? Se sì, calcolarlo

9) Dare un esempio di funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  semi continua in perbole ma non continua.

10) Trovare un esempio di funzione  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  discontinua in tutti i punti con  $|f|$  continua in tutti i punti.

11) Trovare una funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua in un solo punto.

12) Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione reale.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Definiamo per ogni  $x \in \mathbb{R}$

$$\omega_f(x) := \inf \{ \text{diam}(f(x-\delta, x+\delta)) : \delta > 0 \}$$

dove il diametro di un insieme  $E \subseteq \mathbb{R}$

$$\text{diam}(E) := \sup \{ |x-y| : x, y \in E \}$$



Dimostrare che

i)  $f$  continua in  $x \Leftrightarrow \omega_f(x) = 0$

ii)  $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \{x \in \mathbb{R} : \omega_f(x) < \lambda\}$   
è aperto in  $\mathbb{R}$

iii) L'insieme dei punti di continuità  
di  $f$  è una intersezione numerabile  
di aperti.

iv) Non esiste una funzione continua solo su  $\mathbb{Q}$   
definita da  $\mathbb{R}$  a valori in  $\mathbb{R}$ .