

Def. 2.1

Si $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $\uparrow$
 intervallo (dunque convesso).

Si dice che f è convessa se

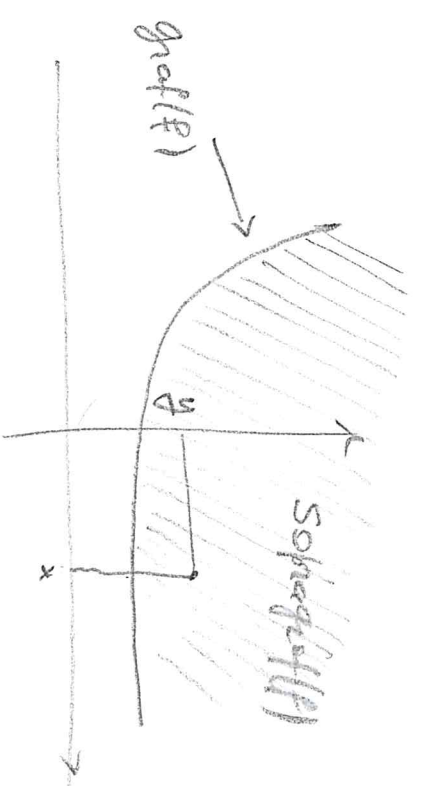
$$\forall x_0, x_1 \in I \quad \forall t \in (0, 1) \quad \text{vale}$$

$$f(tx_0 + (1-t)x_1) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1) \quad (2.1)$$

Si dice inoltre che f è strettamente convessa se vale < nella (2.1)

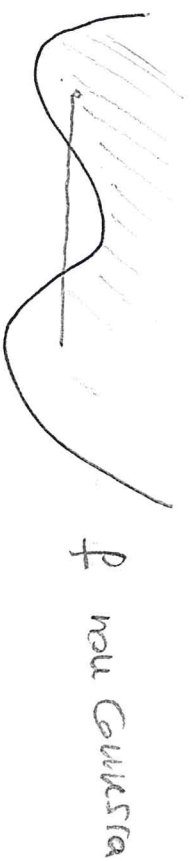
La (2.1) ^(es. caso) è equivalente a:

l'epigrafo f è convesso



dove $\text{epigrafo}(f) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x) \}$

ES 3.1



ES 3.2 $\sqrt{\frac{CASN}{3}}$

$$f(x) = |x|$$

$\bar{e}$ convessa, $\bar{e}$ hella d. lu.

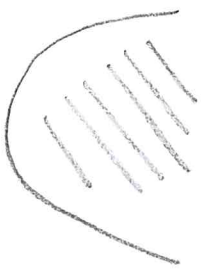
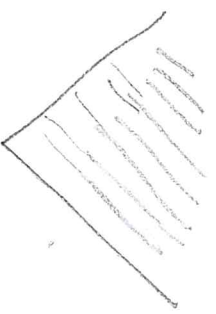
$$|tx_0 + (1-t)x_1| \leq t|x_0| + (1-t)|x_1|$$

$$f(x) = x^2$$

$\bar{e}$ convessa " " " "

$$(tx_0 + (1-t)x_1)^2 \leq tx_0^2 + (1-t)x_1^2$$

$\forall x_0, x_1 \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in (0, 1)$



oss 3.3

La (2.1) $\bar{e}$ difficile da manipolare, perché coinvolge

3 punti: $x_0, x_1, \quad tx_0 + (1-t)x_1$

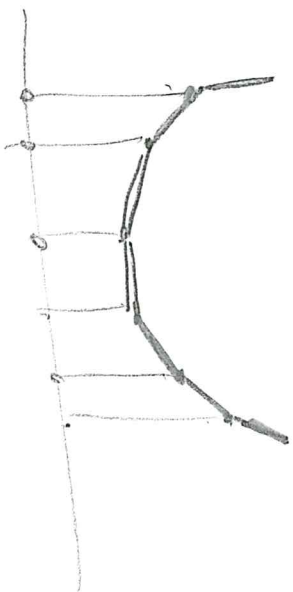
oss 3.4

Nella Def. 2.1 $\equiv$ non si suppone che f sia convessa,

$\bar{o}$ derivabile, $\bar{o}$ derivabile 2 volte.

Il problema è che, in generale, una funzione convessa può non essere

derivabile in molti punti.



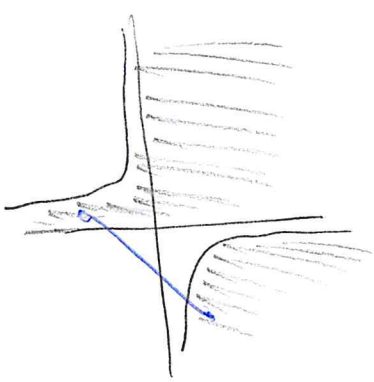
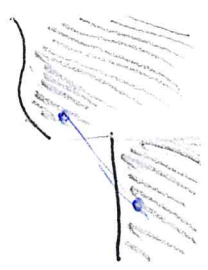
Domande naturali: cosa si può dire sulla continuità e sulla derivabilità (prima e seconda) delle funzioni convesse?
 È riproducibile a spicchi da $f \in C^1 \dots$ derivabile 2
 volte, allora f convessa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \text{dom}(f)$

Ma f in generale non è sempre derivabile

vediamo una volta!

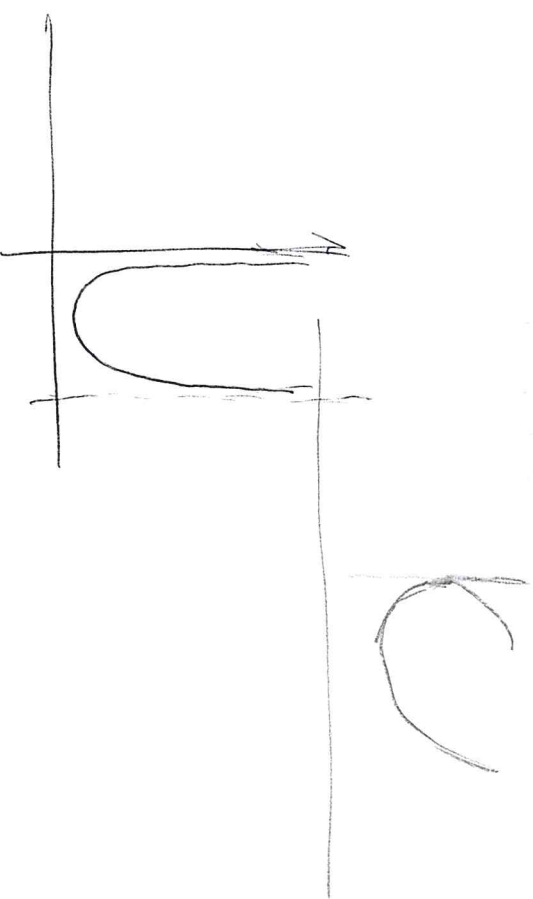
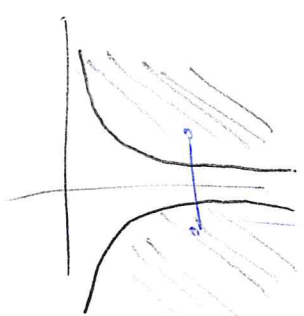
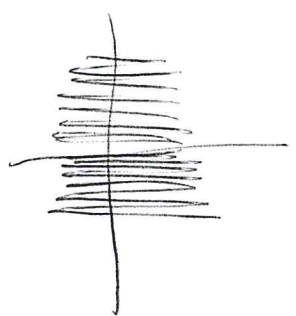
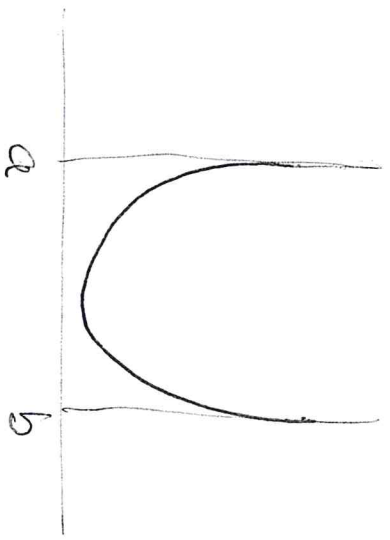


Prima ancora, possiamo immaginare funzioni convesse differenziabili?



Per questo riguarda la costruzione e la derivata, Rappresenta la funzione:

f convessa $\Rightarrow f$ non nec. derivata (solo agli estremi del suo dominio)
 f concava $\Rightarrow f$ derivata e all'interno del dominio
 $\exists$ sempre derivata destra e sinistra finite all'interno



Def 6.1 $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice calcola

se $-f$ è calcola, strettamente calcola $-f$
 è strettamente calcola. (con κ vale $\geq$ nella (2.11))

Basta dunque studiare la funzione calcola.

Esistono funzioni calcola e calcola?

supgraf(f) calcola e
subgraf(f) calcola

Le linee: $f(x) = \alpha x + \beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

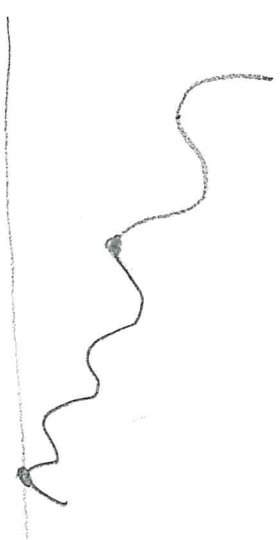
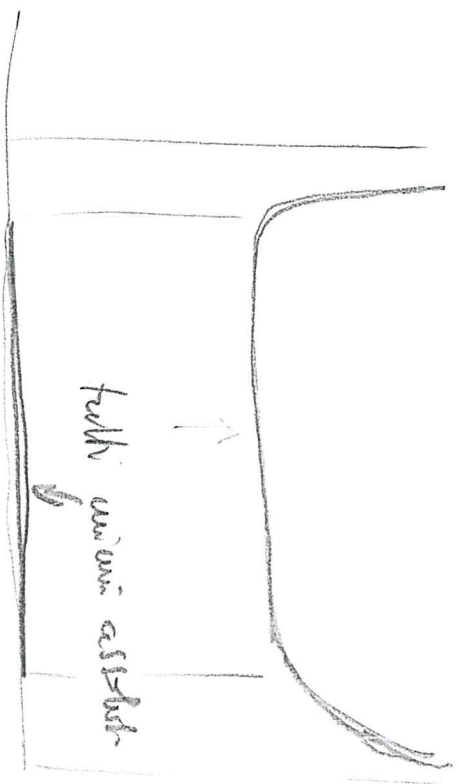
supgraf(f)

subgraf(f)

subgraf(f) = $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y \leq f(x)\}$

in cui vale $\geq$ nella (2.11)

Lo studio delle funzioni continue è legato alla ricerca dei
minimi assoluti di una funzione: una funzione
ha! minimo assoluto (: eggio minimo locale è assoluto)



Teo 7.1.

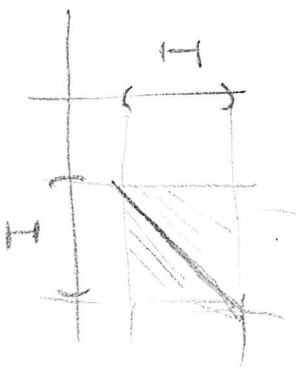
Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo,

f continua.

Definiamo

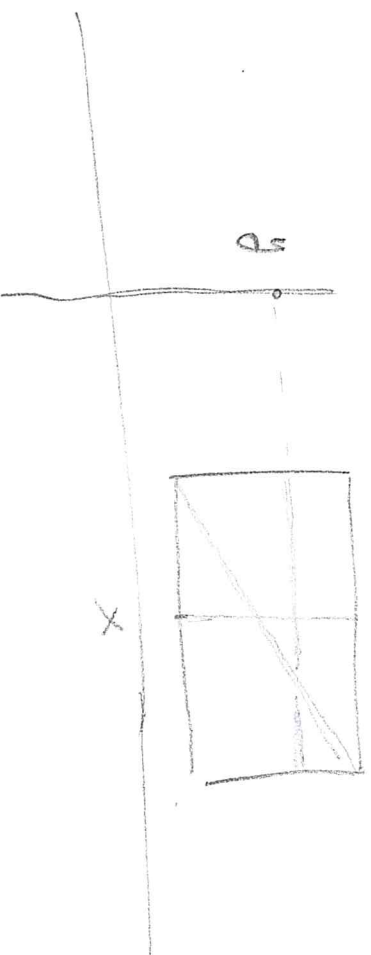
$$F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y},$$

$$(x, y) \in (I \times I) \setminus \Delta \text{ dipende} = \\ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, y \in I, x \neq y\}$$



Alors F est croissante (non décroissante) si
 croissante, c'est $\forall y \in I$ la fonction $x \in I \rightarrow F(x, y)$ est croissante } (8.1,

$$\forall x \in I \text{ la fonction } I \ni y \rightarrow F(x, y) \text{ est croissante.} \quad (8.2)$$

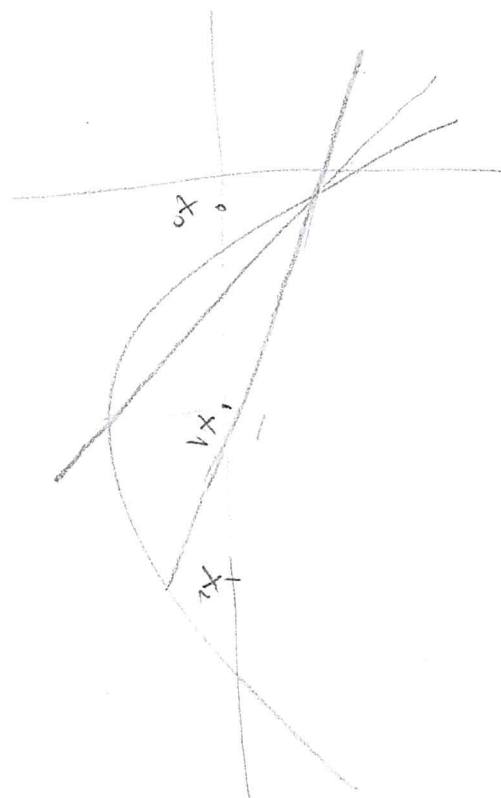


Dln on a de $F(x, y) = F(y, x) \quad \forall x, y \in \text{dom}(F)$

$$F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$$

$$F(y, x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = F(x, y)$$

F est symétrique vis-à-vis de
 l'échange x et y



Benche allora dimostrava da prima che $y \in I$ la $F(\cdot, y)$

(cioè la $x \mapsto F(x, y)$) è crescente: cioè mi basta dimostrare che

la (8.1), prendi la (8.2) segue dalla (8.1) e la simmetria di F .

Fissiamo $x_0 \in I$: dimostriamo che $x \mapsto F(x, x_0)$ è crescente.

Però cioè dimostrare che se $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, si

$$\text{ha } F(x_1, x_0) \leq F(x_2, x_0) \quad (9.1)$$

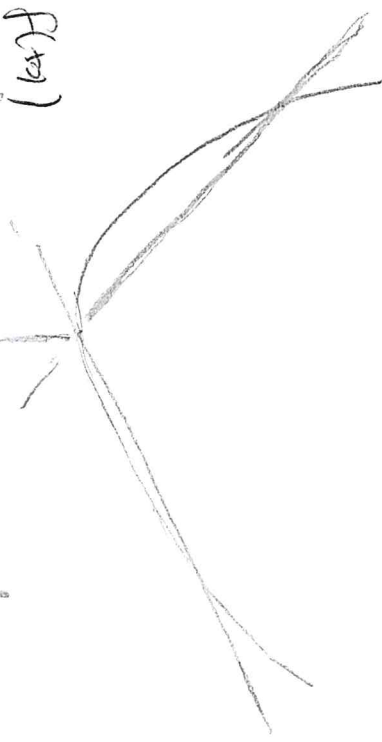
(qui si vede la difficoltà segnalata nella Oss. 3.3, di lavorare con 3 punti allo stesso tempo)

La (9.1) esprime il fatto geometrico

che la pendenza della retta secante

al graf(f) passante per $(x_1, f(x_1))$ e $(x_0, f(x_0))$

è $\leq$ pendenza della retta secante al graf(f) passante per $(x_0, f(x_0))$, $(x_2, f(x_2))$ ($x_1 < x_2$!!)



Lecture 40 11/12/17

10-13

1

Ans

$x \rightarrow 0$

$$\frac{\sec(2x^2) \sqrt{1-x^2} - x(e^{2x} - 1)}{3x(e^{-2x} - 1 + \ln(2x))}$$

$$\sec y = y - \frac{y^3}{3!} + o(y^3) \Rightarrow \sec(2x^2) = 2x^2 - \frac{4}{3}x^6 + o(x^6) = 2x^2 + o(x^2)$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + o(z^2) \Rightarrow e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$$

$$\ln w = w + \frac{1}{2}w^3 + o(w^3) \Rightarrow \ln(2x) = 2x + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \\ e^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 + o(x^2)$$

$$= 2x + O(x^3)$$

$$(2x^2 + o(x^2)) \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \right) - x(2x + 2x^2 + o(x^2))$$

$$xO(x^3) = o(x^3)$$

$$3x(-2x + 2x^2 + o(x^2) + 2x + 2x^2 + o(x^2))$$

$$-2x^3 + o(x^3)$$

$$6x^3 + o(x^3)$$

$$-\frac{1}{3}$$

Es. 14 Cora

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \operatorname{Sen} \sqrt{x} - x \sqrt{x}}{(tg x)^{5/2}} = -\frac{1}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos x) - tg\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{x \operatorname{Sen} x}$$

Esercizio

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1}, \quad \operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$$

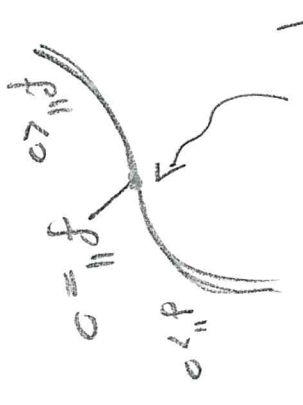
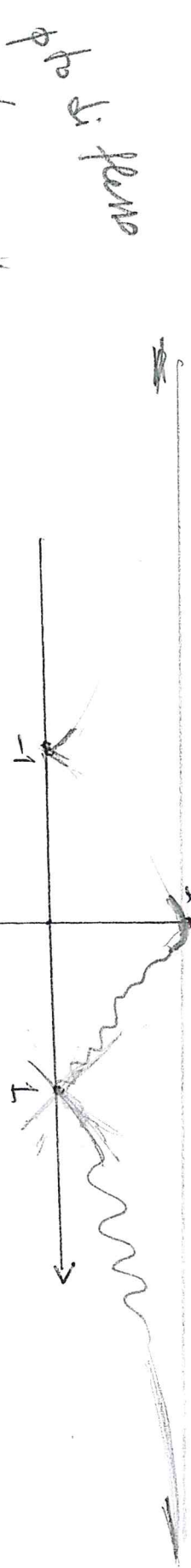
$f(x) = f(-x) \Rightarrow f$ pari. $\Rightarrow$ deriva indivisa il caso $x \geq 0$
 (e poi si valuta il grafico rispetto alle aree $\{x=0\}$); $f(0)=1$
 Sullo stesso dunque $x > 0$, $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\})$. $1 \geq f(x) \geq 0$, $f(x)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$
 $\Rightarrow x=\pm 1$ unici punti di minimo assoluto, $f=0$, ± 1 unici punti di max assoluto

$$f'_4(1) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f'_5(1) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f'' < 0$$

$$f'' > 0$$



$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^3 + 1} \Rightarrow 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2x}{x^3+1} - \frac{2x(x^2-1)}{(x^3+1)^2} \\ -\frac{2x}{x^3+1} - \frac{2x(1-x^2)}{(x^3+1)^2} \end{array} \right.$$

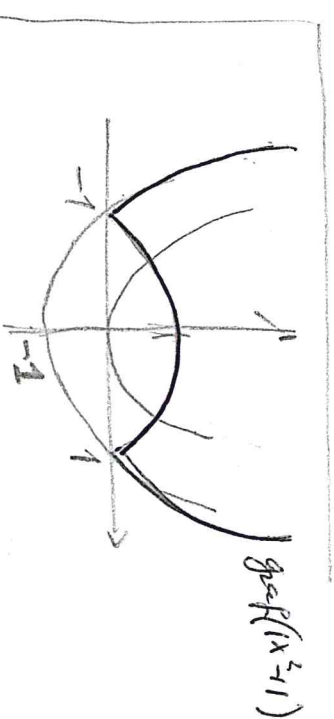
$$0 \leq x < 1$$

$$x > 1$$

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{|x^2-1|} \cdot \frac{2x}{(x^3+1)^2}$$

$$x > 0, x \neq \pm 1$$

$$f'_4(1) = \frac{1}{2}, f'_5(1) = -\frac{1}{2}$$



$$f'(x) =$$

$$\begin{cases} \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} & x > 1 \\ -\frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x(1-x^2)}{(x^2+1)^2} & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$f''(x) =$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x^2+1} - \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^2} + \frac{8x^2(x^2-1)}{(x^2+1)^3} & x > 1 \\ -\frac{2}{x^2+1} + \frac{4x^2}{(x^2+1)^2} - \frac{-6x^2+2}{(x^2+1)^2} + \frac{8x^2(1-x^2)}{(x^2+1)^3} & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

=

$$\begin{cases} \frac{2(x^2+1)^2 - 4x^2(x^2+1) - (x^2+1)(6x^2-2) + 8x^3(x^2-1)}{(x^2+1)^3} = \frac{-12x^2+4}{(x^2+1)^3} & x > 1 \\ \frac{-2(x^2+1)^2 + 4x^2(x^2+1) - (x^2+1)(-6x^2+2) + 8x^2(1-x^2)}{(x^2+1)^3} = \text{Case } \bigcirc & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

$$\text{Studio l'equazione di } x^4 + 2x^2 - 1$$

$$x^2 = 2$$

$$\sqrt{2^2 + 2 \cdot 2 - 1} = 0$$

1/2

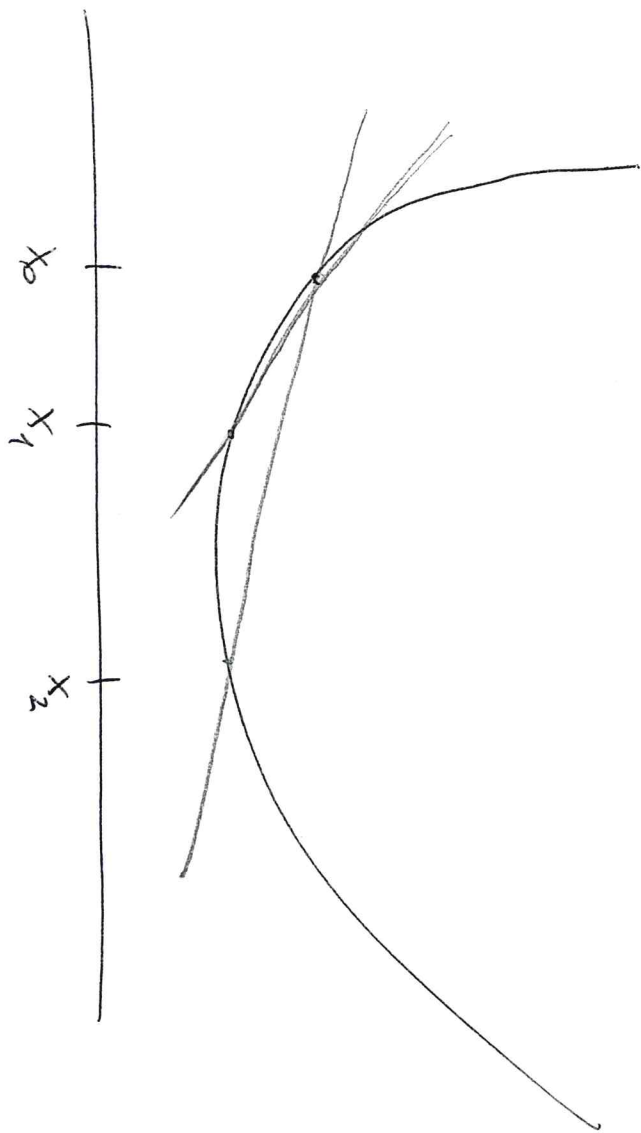
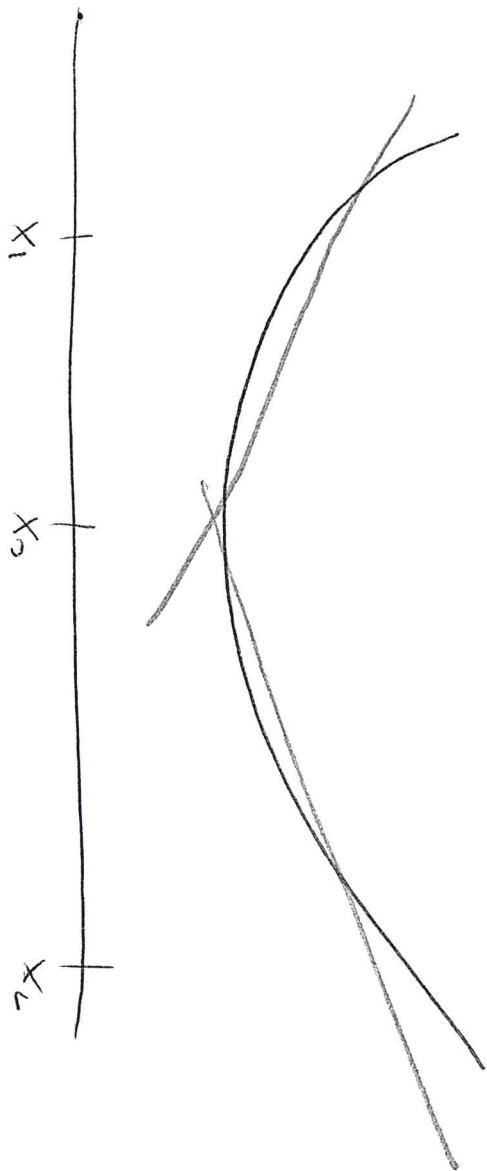
Teo 5.1 Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$,
 f convessa. Definizione

$$F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad (x, y) \in I^2 \setminus \{x = y\}$$

Allora F è separatamente convessa.

Dim Sia $x_0 \in I$ fisso. Siano $x_1, x_2 \in I$, $x_1 \neq x_0$,
 $x_2 \neq x_0$. Dato che

$$F(x_1, x_0) \leq F(x_2, x_0) \quad (5.1)$$



V. solo 3 casi:

1°) $x_0 < x_1 < x_2$



2°) $x_1 < x_2 < x_0$

3°) $x_1 < x_0 < x_2$

Dimostrare il 1° caso, la dimostrazione negli altri 2 casi è simile (ma èishulho facile a caso)

Se da $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ è concava

$$f(ty + (1-t)y) \leq tf(y) + (1-t)f(y)$$

$$\forall y \in I, \forall t \in (0,1)$$

$$f(\underbrace{tx_0 + (1-t)x_2}_{x_1}) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_2) \quad (7.1)$$

di $t \in (0,1)$
il segmento
che va da
al punto
prende tutto
il segmento
che

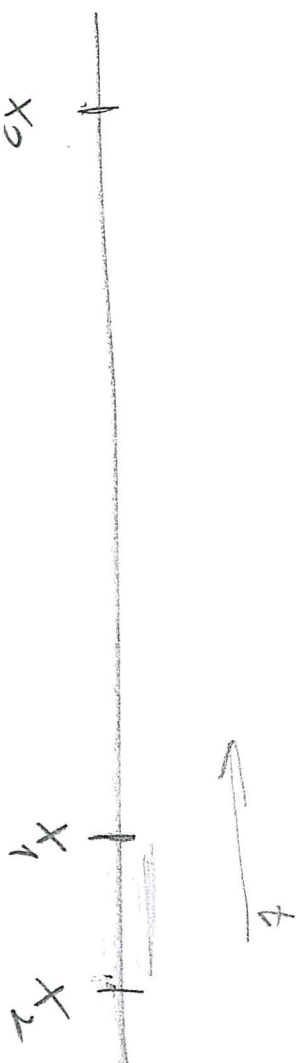
Dati x_0, x_1, x_2 come in 1°), cerco l'unico $t \in (0,1)$

che

$$x_1 = tx_0 + (1-t)x_2 = x_2 + t(x_0 - x_2)$$

$$t = \frac{x_1 - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0} \in (0,1)$$

$$1-t = \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0}$$



$$\text{Dalla (7.1)} \implies f(x_1) \leq \frac{x_2 - x_1}{x_2 - x_0} f(x_0) + \frac{x_1 - x_0}{x_2 - x_0} f(x_2)$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)f(x_0) + (x_1 - x_0)f(x_2)}{x_2 - x_0} \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \text{La (5.1)} \quad & \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \quad (10.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{da (8.1)} \quad & \text{lopo } f(x) \\ & f(x_1) - f(x_0) \leq \frac{(x_2 - x_1)f(x_0) - (x_2 - x_0)f(x_1) + (x_1 - x_0)f(x_2)}{x_2 - x_0} \end{aligned}$$

$$= \frac{(x_0 - x_1)f(x_0) + (x_1 - x_2)f(x_2)}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{(x_1 - x_0)(f(x_2) - f(x_0))}{x_2 - x_0}$$

$$\begin{aligned} \text{Dimdo } & \mu \quad x_1 - x_0 > 0 \quad \epsilon \text{ lo} \\ & \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \quad \text{da } \sim \text{La (10.1)}. \quad \square \end{aligned}$$

Te 11.1 Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ I intervallo

ha

$$F(x, y) := \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad (x, y) \in I^2, \{x \neq y\}$$

Allora F è crescente separatamente nelle due variabili.

$\Rightarrow f$ è convessa.

Dim Siano $x_1, x_2 \in I$, $\forall t \in (0, 1)$. Dato che

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2).$$

$\mathbb{R}$ ipotesi
(4.1.1)

$$F(x_1, x) \leq F(x_2, x), \quad \text{vera} \quad \forall x \in I, x \neq x_1, x_2$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \parallel \\ & \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \end{aligned}$$



Scego

$$X = tx_1 + (1-t)x_2 \quad (x \neq x_1, x_2)$$

nella (11.1) e ottengo

$$\frac{f(x_1) - f(tx_1 + (1-t)x_2)}{x_1 - tx_1 - (1-t)x_2} \leq \frac{f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2)}{x_2 - tx_1 - (1-t)x_2}$$

||

$$\frac{f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1)}{tx_1 + (1-t)x_2 - x_1}$$

E' quivalente a

$$\begin{aligned} & \left(f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(x_1) \right) (x_2 - tx_1 - (1-t)x_2) \leq \left(f(x_2) - f(tx_1 + (1-t)x_2) \right) (tx_1 + (1-t)x_2 - x_1) \\ & f(tx_1 + (1-t)x_2) \left[x_2 - tx_1 - (1-t)x_2 + tx_1 + (1-t)x_2 - x_1 \right] \leq f(x_1) (x_2 - tx_1 - (1-t)x_2) \\ & \quad + f(x_2) (tx_1 + (1-t)x_2 - x_1) \end{aligned}$$

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq \frac{1}{x_2 - x_1} \left[f(x_1)(x_2 - tx_1 - (1-t)x_2) + f(x_2)(tx_1 + (1-t)x_2 - x_1) \right] \stackrel{13}{=} MD$$

Se il secondo derivato $f'' = t f'(x_1) + (1-t) f'(x_2)$ ho finito

$$MD = \frac{1}{x_2 - x_1} \left[f(x_1)(-tx_1 + tx_2) + f(x_2)(x_1(1-t) + (1-t)x_2) \right]$$

$$= \frac{1}{\cancel{x_2 - x_1}} \left[t f(x_1)(\cancel{x_2 - x_1}) + (1-t) f(x_2)(\cancel{x_2 - x_1}) \right] \quad \square$$

Teo 13.1 Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa,

$x \in \overset{\circ}{I}$ = p. interna di I .

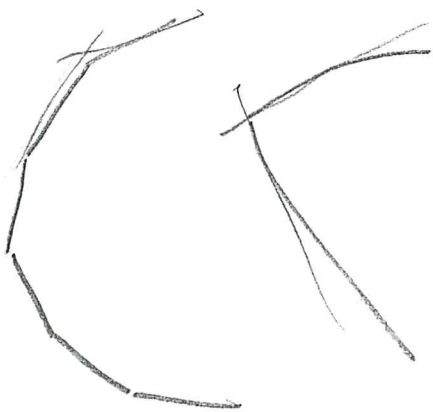
Allora $\exists f'_d(x), \exists f'_s(x),$

e $f'_d(x) \in \mathbb{R}, f'_s(x) \in \mathbb{R}$.

Ex Se $x \in \overset{\circ}{I}$, $\forall h > 0$ existe α suficiente

ta modo $x+h \in I$, $x-h \in I$.

De le 5.1 h de F é separadamente crescente.

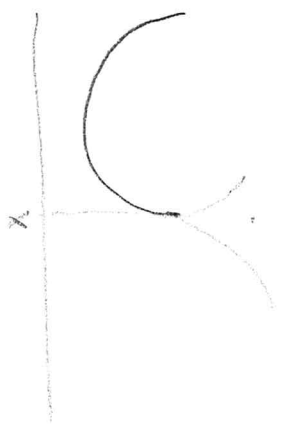


$$f'_d(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} F(x+h, x) \text{ existe}$$

pois $F(\cdot, x)$ é crescente, e sabemos que uma função monotônica de uma variável real admite derivada quase em toda parte.

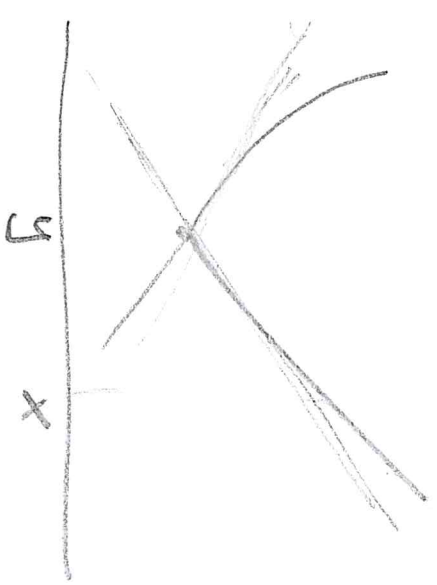
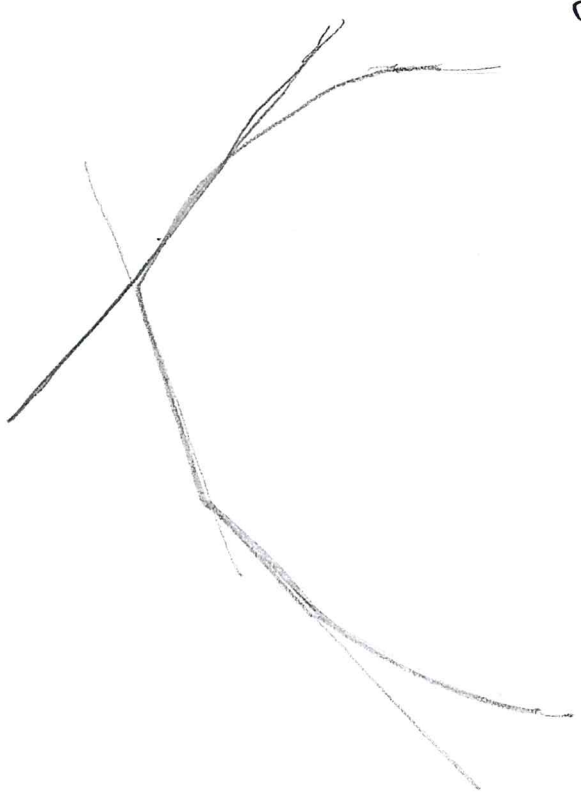
De que $\exists$ cada $f'_s(x)$. Sempre por monotonia $f'_s(x) \leq f'_d(x)$

Seule la monotonicité



$$\mathbb{R} \ni \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \leq f'_s(x) \leq f'_d(x) \leq \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \in \mathbb{R} \quad (15.1)$$

□

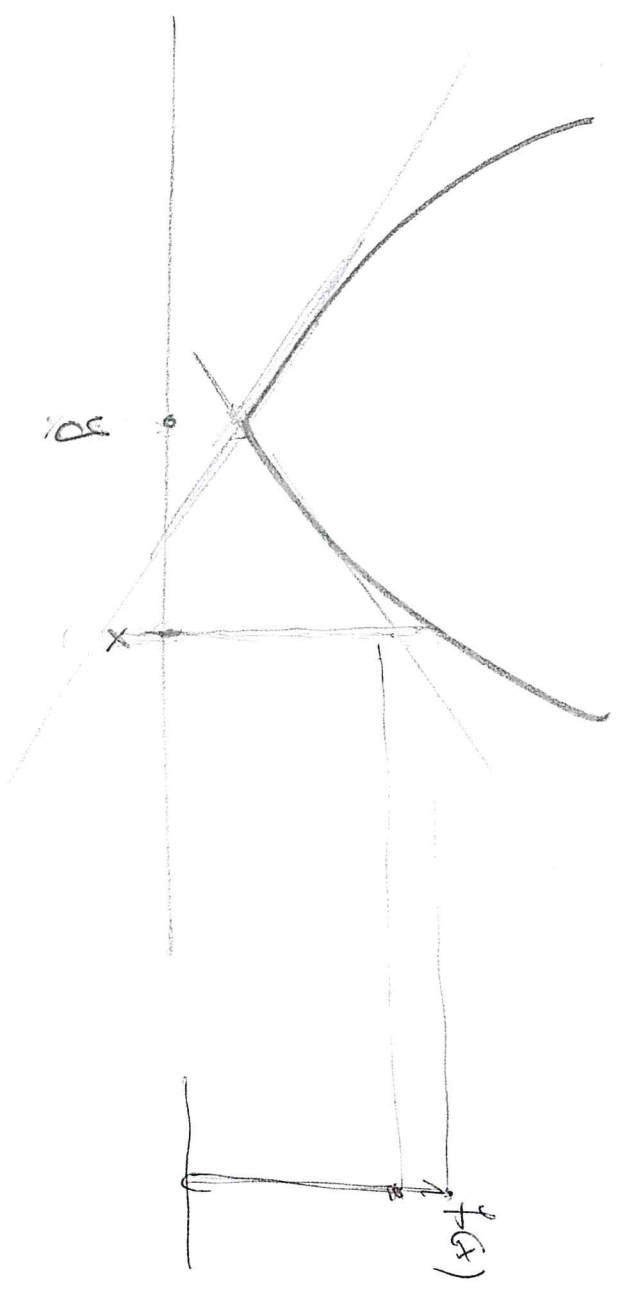


Teo 16.1 Se $f: I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

Atora $\forall x, y \in I$ si ha

$$f'_d(y)(x-y) + f(y) \leq f(x) \quad (16.1)$$

$$f'_s(y)(x-y) + f(y) \leq f(x) \quad (16.2)$$



Dim. Distinguiamo la (16.1), la cui. della (16.2) è
 triviale. Se $x=y$, la (16.2) è evidente. Posto inoltre $x \neq y$
 ci sono due casi: $x > y$

$$x < y$$

Caso $x > y$: prendi f' valore arbitrario nella (15.1), e diciamo

$$\begin{aligned} x &\leftarrow x+h \\ y &\leftarrow x \end{aligned}$$

e otteniamo

$$f'_d(y) \leq \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \Rightarrow f'_d(y)(x-y) + f(y) \leq f(x),$$

che è la (16.1). Nel caso $x < y$, analogamente diseg. a sinistra
 nella (15.1), e si ottiene la (16.2). $\square$

Lezione 41 12/12/17 11-13

1

Avremmo visto il teorema (ultimo della lezione 40)

Teo $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa. Allora $\forall x, y \in I$

$$f'_d(y)(x-y) + f(y) \leq f(x) \quad (1.1)$$

$$f'_s(y)(x-y) + f(y) \leq f(x) \quad (1.2)$$

Nota $f'_d(y), f'_s(y)$ esistono per un teorema precedente.

« Vogliamo poter verificare quando una funzione è convessa,

se può o no essere derivata derivabile 1 volta: idea:

f' deve essere crescente. (se può derivabile 2 volte, benché $f'' \geq 0$) $\Rightarrow$

Il problema è che come sappiamo f'_d può non esistere (e tanto meno $f''(y) \dots$)

Per mostrare ancora che f continua $\Rightarrow f$ continua (cosa che ci aspettiamo).



Te $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, sia $[c, d] \subset I$ dove
 sono $I = (a, b)$ con $-\infty < a < b < +\infty$. Allora vale:

$$f'_5(c) \stackrel{(1)}{\leq} f'_d(c) \stackrel{(2)}{\leq} \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \stackrel{(3)}{\leq} f'_5(d) \stackrel{(4)}{\leq} f'_d(d) \quad (2.1)$$

Dim Le (2.1.1) e (2.1.4) sono già state dimostrate
 (conseguente della monotonia dei rapporti incrementali). Resta da
 dimostrare

$$f'_d(c) \leq \frac{f(d) - f(c)}{d - c} \leq f'_5(d) \quad (2.2)$$

Usiamo le (1.1) e (1.2). Nel caso $x = d$ e $y = c$ vale (1.1)

Si ottiene

$$f'_d(c)(d-c) + f(c) \leq f(d)$$

$$\Rightarrow f(d) - f(c) \geq f'_d(c)(d-c) \quad (d-c > 0)$$

$$\frac{f(d) - f(c)}{d-c} \geq f'_d(c)$$

che è la (2.2) sinistra.

Adesso uno la (1.2) con c al posto di x e d al posto di y

$$f'_s(d)(c-d) + f(d) \leq f(c)$$

$$\Rightarrow f(d) - f(c) \leq f'_s(d)(d-c)$$

$$\Rightarrow \frac{f(d) - f(c)}{d-c} \leq f'_s(d),$$

che è la (2.2) destra. $\square$

~~graf (f)~~
non solo
ma qualunque
sua retta tangente

Cor 4.1 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow f$ continua in I .

(Di più, f è localmente Lipschitziana)

Dim $I = (a, b)$, per $x \in I$, $\varepsilon > 0$
 $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subset I$. Per il teorema di Weierstrass, $x_1, x_2 \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$,

$$f'_d(x-\varepsilon) \leq f'_d(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'_s(x_2) \leq f'_s(x+\varepsilon)$$

per il teorema di Weierstrass

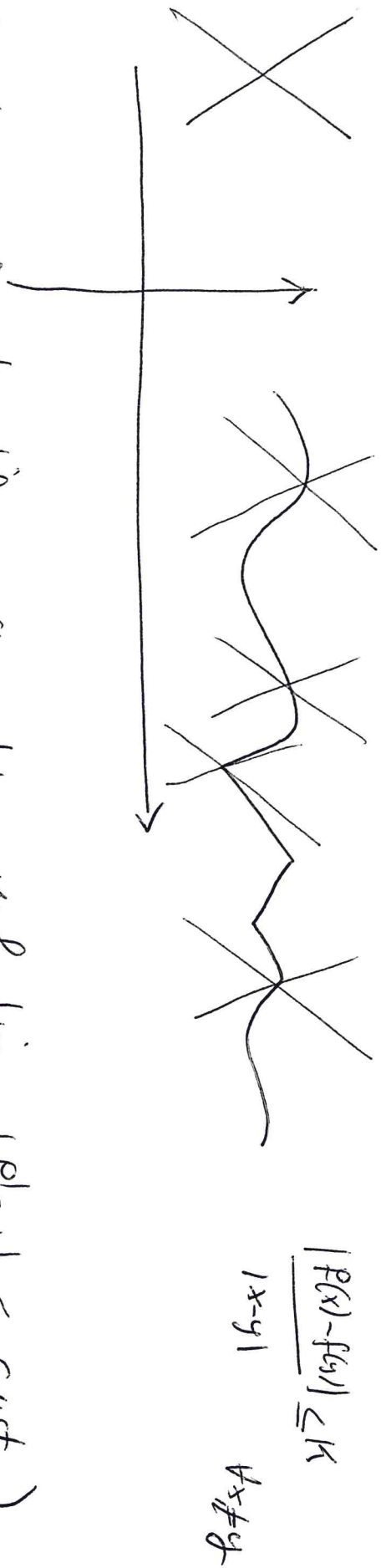
Dim

$$(4.1) \quad \left| \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \right| \leq \max \left(|f'_d(x-\varepsilon)|, |f'_s(x+\varepsilon)| \right) < +\infty$$

$= K(x)$

Def

f is due Lip K
 $\exists K \geq 0$ tale da $|f(x) - f(y)| \leq K |x - y| \quad \forall x, y \in I$



(x f fosse anche derivabile, esiste Lip. vuol dire $|f'(x)| \leq \text{const}$)

Ricordo : $f \in \text{Lip}(I) \Rightarrow f \in \text{U.C.}(I) \Rightarrow f \in \mathcal{C}(I)$.

La (4.1) è un v' mezzo di essere Lip: la (4.1) è quella

$$\forall x \in I \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \exists K(x) \geq 0 :$$

$$(5.1) \quad \frac{|f(x_1) - f(x_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq K(x) \quad \forall x_1, x_2 \in [x - \varepsilon, x + \varepsilon], \quad x_1 \neq x_2$$

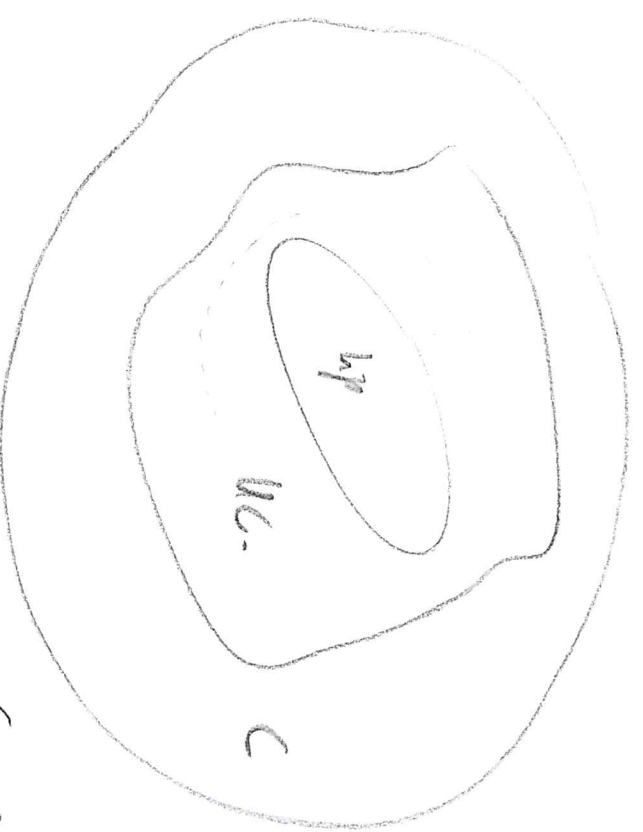
Ma f che verifica (5.1) non è necessariamente Lipschitz continua.

$\Leftarrow K_{\Sigma}(x)$ si trova su U_{ex} $|f'(z)|$ se f è derivabile...

$$\text{Lip}(I) \stackrel{A}{\subseteq} \text{Lip}_{\text{loc}}(I) \quad z \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$$

$$\text{Lip}(I) \stackrel{B \cup I}{\subseteq} \text{U.C.}(I) \stackrel{A}{\subseteq} \mathcal{E}(I)$$

$\text{Dom}(I)$



funzione
stretta.

- Inclusione A $\bar{e}$ il lemma di Bolzano (Corollario 4.1)
- Inclusione B $\bar{e}$ evidente
- Inclusione C $\bar{e}$ derivato da Corollario di Taylor per
- Inclusione D $\bar{e}$ evidente
- Inclusione E $\bar{e}$ fatto a lezione (teo 6.1 lemma 24/11/16)

La funzione $\sqrt[n]{\ln(a,b)}$ è continua su (a,b)

Te Sia $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\exists$ infiniti i punti

la derivata destra e sinistra di f e sono finite, cioè

$$\forall x \in I \quad \exists f'_s(x) \in \mathbb{R}, \quad \exists f'_d(x) \in \mathbb{R}.$$

Dimostrare inoltre che valgono le (1.1) e (1.2)

Allora 1) f è convessa

2) f'_s e f'_d sono monotone non decrescenti.

Dim $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$, sia $t \in (0,1)$, $x = tx_1 + (1-t)x_2$

Applico (1.1) con x al posto di y e x_1 al posto di x :

$$\frac{f(x_1) - f(x)}{x - x_1}$$

"

$$f'_d(x)(x_1 - x) + f(x) \leq f(x_1) \Rightarrow f'_d(x) \geq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = F(x_1, x)$$

$$f'_d(x)(x - x_1) \geq f(x) - f(x_1)$$

(3.1)

Sviluppiamo con x al posto di y e x_2 al posto di x :

$$f'_d(x)(x_2 - x) + f(x) \leq f(x_2)$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \geq f'_d(x) \quad (8.11)$$

(7.1) e (8.1) danno

$$F(x_1, x) \leq \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leq f'_d(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = F(x_2, x)$$

↑

Quindi $F(\cdot, x)$ è una funzione crescente (decrente nel 1° lemma)
 Lemma 4.0

Dal lco. 11.1 Lemma 4.0 segue che f è convessa.

Però da due, da f'_s , f'_s sono necessarie e sufficienti.

Provare che f'_d è monotonamente crescente. (La dim. la f'_s è simile)

Dati $x_0, x_1 \in I$, $x_0 < x_1$ deve dire che $f'_d(x_0) \leq f'_d(x_1)$

Dalla (1.1) con x_1 al posto di y e x_0 al posto di x deduco

$$f'_d(x_1)(x_0 - x_1) + f(x_1) \leq f(x_0) \quad (1.1)$$

Dalla (1.1) con x_0 al posto di y e x_1 al posto di x deduco

$$f'_d(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) \leq f(x_1) \quad (1.2)$$

Sottraendo (1.1) e (1.2) e otteniamo



$$\left(f'_d(x_1) - f'_d(x_0) \right) (x_0 - x_1) \leq 0$$

cioè

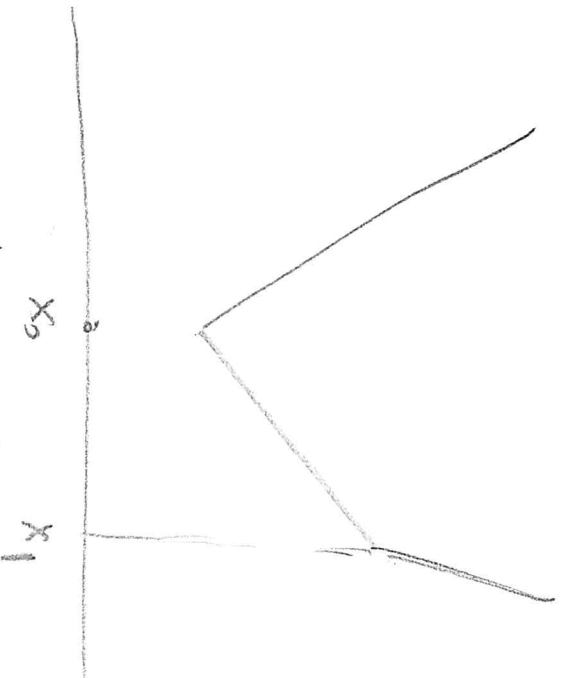
$$\left(f'_d(x_1) - f'_d(x_0) \right) (x_1 - x_0) \geq 0 ;$$

ma $x_1 > x_0$, e dunque $f'_d(x_1) - f'_d(x_0) \geq 0$ $\square$

Corollario Se $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa. Allora

10

$$x_0, x_1 \in I \quad x_0 < x_1 \Rightarrow f'_d(x_0) \leq f'_s(x_1)$$



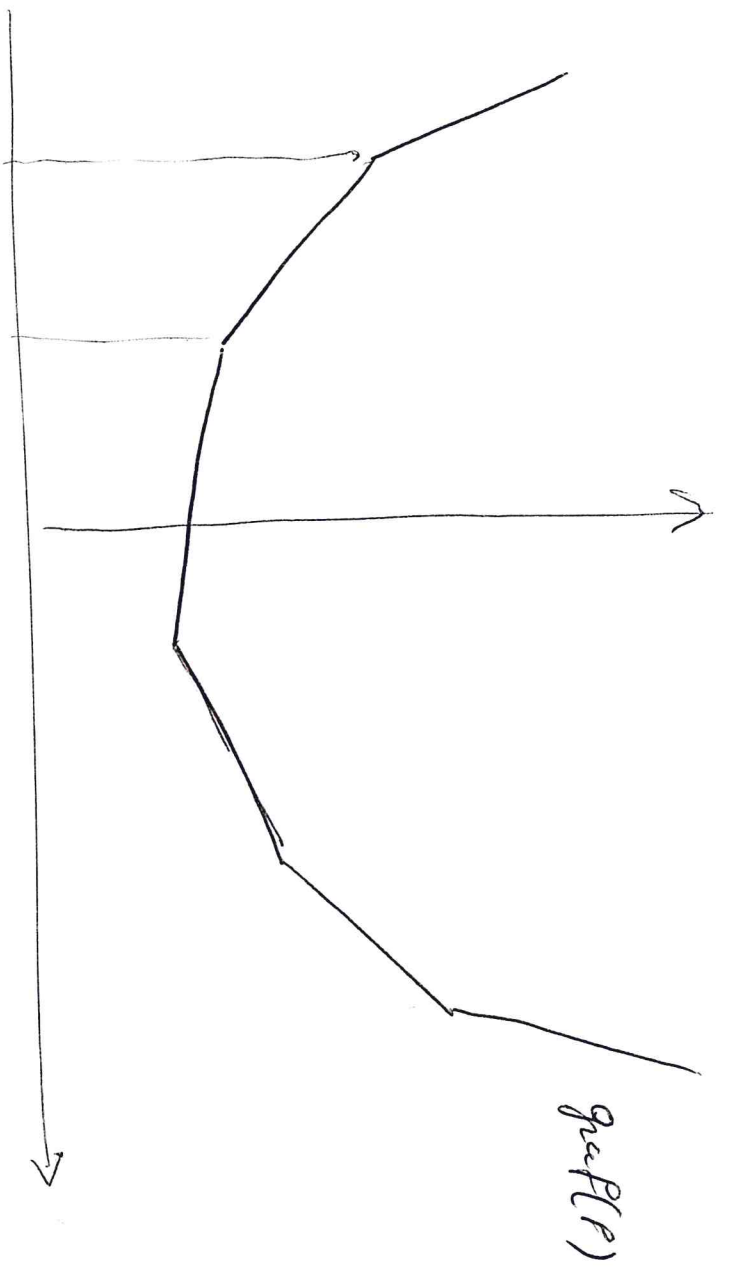
$$f'_d(x_0) < f'_s(x_1)$$

$$f'_s(x_1) < f'_d(x_1)$$

«

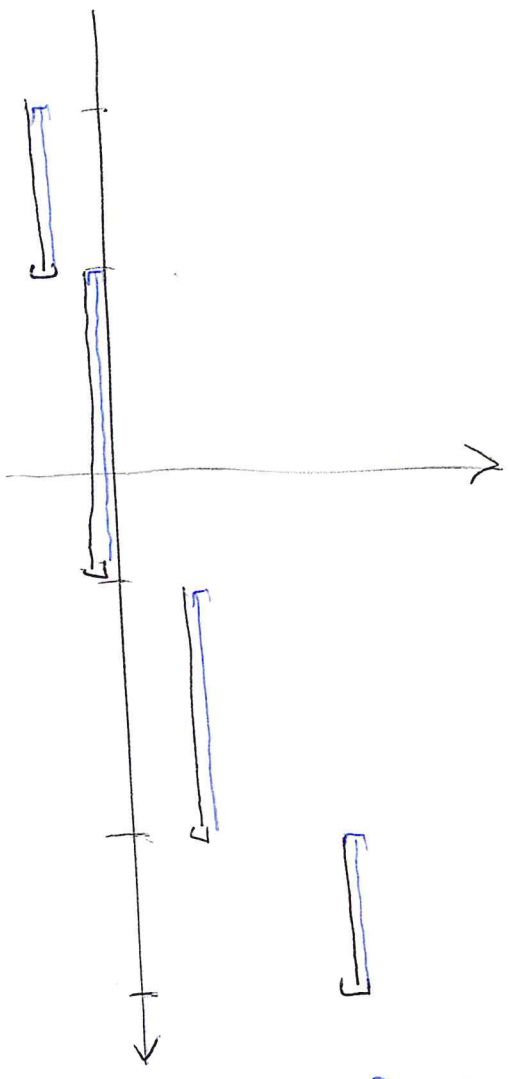
la + grande delle
due derivate nel punto
di sinistra $\leq$ della
+ piccola delle due
derivate nel punto di
destra $\Rightarrow$

Corollario Se $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa. Allora
 f'_s e f'_d sono funzioni non decrescenti (crescenti)



$g_{\alpha}f(p'_5)$
 $g_{\alpha}f(p'_4)$

continue a linha
 continue a linha



1

Lezione L12

13/12/17

11-13

ES103 (conseguenza delle cose viste nelle lezioni precedenti),
e molto utili nella pratica:

ES1 ha $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f derivabile in I .

Allora

f convessa $\iff f'$ è non decrescente.

ES2 ha $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f derivabile due volte in I .

Allora

f convessa $\iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

ES ES.2 segue immediatamente da ES1

ES1 $\implies$ segue da un tes. vrb. ovv. $\Leftarrow$ usare lo language

ES 3 ^{**} $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora

1) f'_d è continua da destra, cioè

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} f'_d(x+h) = f'_d(x) \quad \forall x \in I$$

2) f'_s è continua da sinistra, cioè

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} f'_s(x+h) = f'_s(x) \quad \forall x \in I$$

3) f è derivabile in $x \in I \iff f'_d(x) = f'_s(x)$

f'_d e f'_s hanno gli stessi punti di discontinuità, e la continuità da questi punti di discontinuità è il più ammessa.

4) se f è derivabile in $x \implies f'$ è continua in x .

Es (que valeis tam f₀)

$$f(x) = x^2 \text{ e convexa em } \mathbb{R}.$$

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}) \quad f''(x) = 2 > 0 \Rightarrow f \text{ e convexa em } \mathbb{R}.$$

Avi de t, f e stictamente convexa.

Invece, se avess valors mags da definicao, avess doado duas vezes que no;

$$\left(\cancel{tx_1} + (1-t)x_2 \right)^2 \leq tx_1^2 + (1-t)x_2^2 \quad \forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in (0,1)$$

$$t^2 x_1^2 + (1-t)^2 x_2^2 + 2t(1-t)x_1 x_2 \leq tx_1^2 + (1-t)x_2^2 \quad (3.1)$$

Se $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$. Da desigualdade, $|tx_1|^2 \leq tx_1^2$ se $t < 1$

ad exemplo, se $x_2 = 0$

Donque $|tx_1|^2 \leq tx_1^2$ $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$. Divido por x_1^2 e pongo $y = x_1/x_2$

$$(t^2 - t)y^2 + 2t(1-t)y + (1-t)^2 - (1-t) \leq 0 \quad \text{dando per } 1-t > 0$$

$$-t y^2 + 2ty + 1-t-1 \leq 0 \quad \text{eccolo... Troviamo i coefficienti}$$

Però fare così? La (3.1) equivale a:

$$(t-t^2)x_1^2 + [(1-t)-(1-t)^2]x_2^2 - 2t(1-t)x_1x_2 \geq 0$$

$$t(1-t)x_1^2 + (1-t)t x_2^2 - 2t(1-t)x_1x_2 \geq 0 \quad \text{divido per } t(1-t) > 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 \geq 0 \quad \text{si vede}$$

$$(x_1 - x_2)^2$$

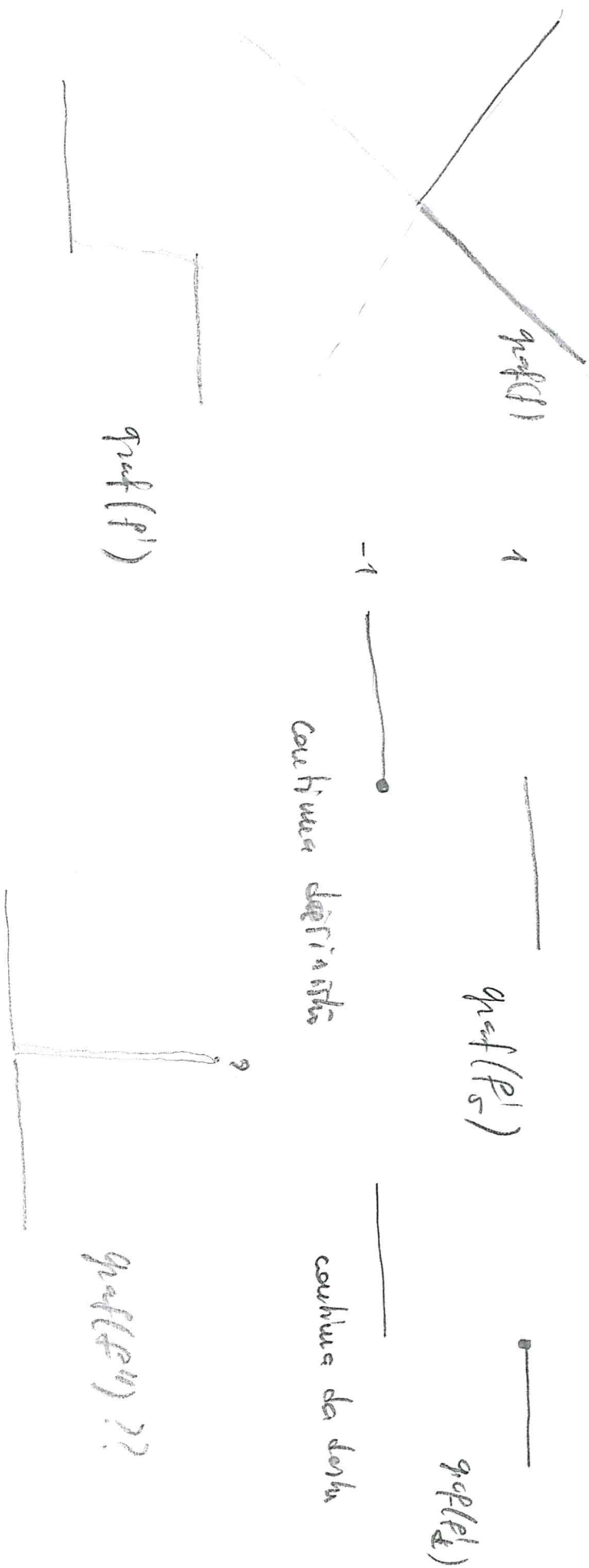
In realtà è strettamente positiva tutta la disuguaglianza che
però si vede tranne da nel caso $x_1 = x_2$

ES 4 $f(x) = |x|$ e Gâteaux in $\mathbb{R}$

$$(f(x) = |x - a| = \text{dist}(x, a)) \leq 4$$

(ma non vedo come)

Non posso applicare ES 2 perché.



Non posso applicare ES 1, perché. Allora devo dimostrare che $|tx_1 + (1-t)x_2| \leq t|x_1| + (1-t)|x_2|$ $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \forall t \in (0,1)$.

Per questo è facile

$$|tx_1 + (1-t)x_2| \leq |tx_1| + |(1-t)x_2| = t|x_1| + (1-t)|x_2| \stackrel{\leq}{=} |x_2|$$

$$(|a+b| \leq |a| + |b|)$$

Ci serve un altro modo (che qui è inutile) vale a dire

Teo : $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \exists f'_s \quad \exists f'_d$ in tutti i punti di I
e sono finite, e univocamente

$$(5.1) \quad \begin{aligned} f'_d(y)(x-y) + f(y) &\leq f(x) & \forall x, y \in I \\ f'_s(y)(x-y) + f(y) &\leq f(x) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ è convessa. (più tenera Lemma 4.1)

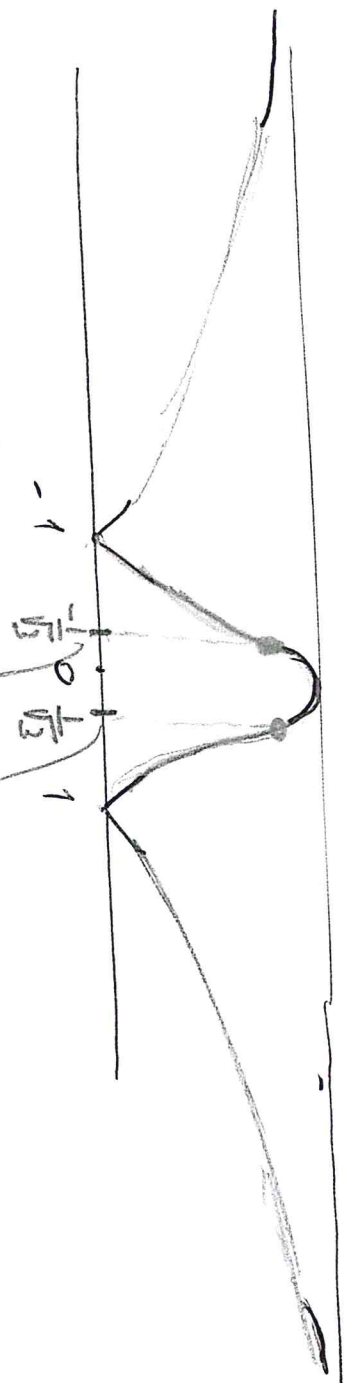
In questi casi f'_d e f'_s sono applicati e da (5.1) si possono

concludere.

Infima

$$f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x^2 + 1}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$



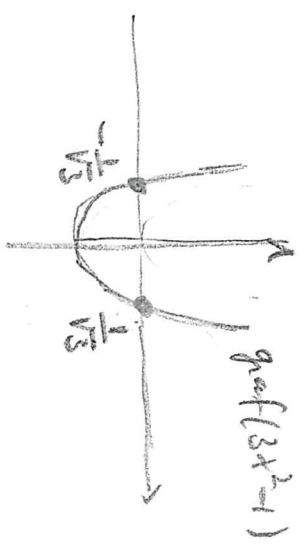
$$f''(x) = \frac{4(3x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^3}$$

points
de flexão

$$\forall x \in (-1, 1)$$

$$f'(x) = \frac{4(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$$



Def $f: I = (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f derivable $\Rightarrow$ velle. 7

x_0 n dice $\downarrow$ keep & $\exists \delta > 0$: $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq I$,

$$f''(x_0) = 0$$

$$f''(x) > 0$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

$$f''(x) < 0$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$

$$f''(x_0) = 0$$

$$f''(x) < 0$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$$

$$f''(x) > 0$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$$



INTEGRAZIONE SECONDO RIEMANN

(ci sono tante altre cose dell'integrazione...)

Notazioni: sull'insieme $\mathcal{D}$ della $\mathcal{D}$ una funzione f

La sua derivata $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(equazione diff. particolarmente semplice per la legge $f'(x) = f(x)^3$.)
ma non su f ; ad esempio $f'(x) = f(x)^3$.

Vogliamo trovare $f(x)$ Non è $\frac{1}{2} \log(1+x^2)$ $\rightarrow \frac{\otimes}{1+x^2}$

$$f(x) = \arctan x + \text{const}$$

ho infinite soluzioni (famiglia delle primitive di $\frac{1}{1+x^2}$)
 $\Leftarrow$ antiderivata $\Rightarrow$