OTTIMIZZAZIONE LINEARE MULTICRITERIO

NOTAZIONE

Siano x ed y vettori di $\mathbf{R}^n$ indicati estesamente con

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{y} \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

e si ponga $N = \{1,2,\ldots, n\}$. Scriveremo allora:

$\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ (“**x** è diverso da **y**”) se e solo se esiste almeno un indice $i \in N$ per cui $x_i \neq y_i$;

$\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ (“**x** è maggiore o uguale a **y**”) se e solo se $x_i \geq y_i$, per ogni $i \in N$;

$\mathbf{x} > \mathbf{y}$ (“**x** è maggiore di **y**”) se e solo se $x_i > y_i$, per ogni $i \in N$;

$\mathbf{x} >= \mathbf{y}$ (“**x** prevale su **y**”) se e solo se $\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$ e $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$.

NOTAZIONE

Il poliedro $S = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$, con $\mathbf{A}$ $m \times n$ e *rango* $(\mathbf{A}) = m \leq n$, verrà detto regione ammissibile ed ogni punto in esso contenuto decisione ammissibile.

Un criterio è una applicazione f: $S \rightarrow \mathbf{R}$ che associa ad ogni decisione ammissibile $\mathbf{x}$ un valore $f(\mathbf{x})$ atto a misurarne la prestazione (beneficio, costo, peso, etc...). Un criterio si dice lineare se $f(\mathbf{x})$ è una funzione lineare in $\mathbf{R}^n$ ovvero se può scriversi nella forma $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ con $\mathbf{c}$ vettore costante conforme ad $\mathbf{x}$.

In un problema di programmazione lineare multiobiettivo si vogliono "massimizzare" p funzioni lineari, o obiettivi, nel poliedro S:

$$\begin{aligned} \max \mathbf{Cx} \\ \mathbf{Ax} = \mathbf{b}; \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

La notazione è impropria, perché la decisione ottima secondo un criterio, non sarà, in generale, ottima per tutti gli altri.

Una definizione condivisibile potrebbe essere la seguente: *una decisione* $\mathbf{x}$ *in S è ottima se non esistono altre decisioni di S che aumentano il valore di un qualunque criterio in* $\mathbf{x}$ *senza diminuire il valore di almeno un altro criterio.*

PARETO-OTTIMALITA'

Sia $\mathbf{z} = \mathbf{Cx}$ e $\mathbf{z}^* = \mathbf{Cx}^*$; diremo allora che la decisione $\mathbf{x}$ è dominata dalla decisione $\mathbf{x}^*$ se $\mathbf{z}^* >= \mathbf{z}$; per indicare il fatto che $\mathbf{x}^*$ domina $\mathbf{x}$ scriveremo $\mathbf{x}^*$ **f** $\mathbf{x}$.

DEFINIZIONE: (Pareto-ottimalità). $\mathbf{x} \in$ S si dice Pareto-ottima o efficiente se non esiste alcun $\mathbf{y} \in S$ tale che $\mathbf{y}$ **f** $\mathbf{x}$.

Il problema di ottimizzazione si riduce ad un problema di ricerca di almeno una soluzione Pareto-ottima in *S*; in simboli, cerchiamo un elemento dell'insieme:

$$\{\mathbf{x} \in S\text{: non esiste } \mathbf{y} \in S \text{ per cui } \mathbf{Cy} >= \mathbf{Cx}\}$$

DEFINIZIONE: (Frontiera efficiente). L'insieme dei punti Pareto-ottimi di *S* è un sottoinsieme di S detto sua frontiera efficiente.

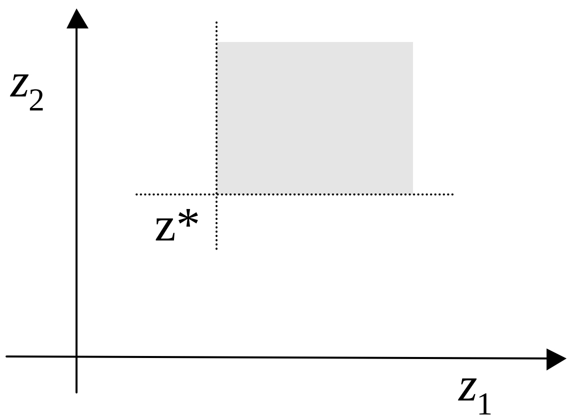
PARETO-OTTIMALITA'

Al poliedro S (data la matrice **C** degli obiettivi) può essere associato un insieme W (spazio degli obiettivi) definito come segue:

$$W \equiv \{\mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x} \colon \mathbf{x} \in S\}.$$

L'insieme W, immagine di S mediante la trasformazione lineare **C**, è anch'esso un poliedro; è possibile anche mostrare che le immagini dei vertici, degli spigoli, delle facce di S sono tutti e soli i vertici, gli spigoli, le facce di W.

Un punto di S è Pareto-ottimo se e solo se la sua immagine in W, sia essa $\mathbf{z}^*$, è tale che nel quadrante nonnegativo di origine $\mathbf{z}^*$, $\{\mathbf{z}\colon \mathbf{z} \geq \mathbf{z}^*\}$, non cadono punti di W ad eccezione di $\mathbf{z}^*$.



Sulla frontiera efficiente possiamo fare le seguenti affermazioni:

1. contiene almeno un vertice;
2. non è, in genere un insieme convesso;
3. è un insieme connesso;
4. è una unione di facce di S (intendendo anche i vertici e gli spigoli come facce del poliedro).

UN ESEMPIO - I

Sia dato il problema:

$$\max \begin{cases} f_1 = -x_1 + 2x_2 \\ f_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases};$$

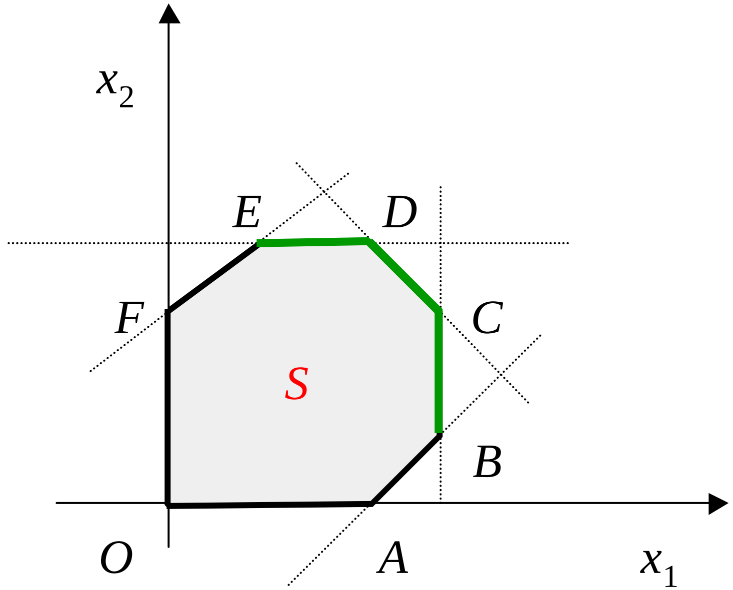
$$x_1 + x_2 \le 7;$$

$$-x_1 + x_2 \le 3;$$

$$x_1 - x_2 \le 3;$$

$$0 \le x_1, x_2 \le 4.$$

Lo spazio delle decisioni è il poligono convesso *S*:



La frontiera efficiente di *S* è la spezzata che unisce ordinatamente i punti *B*, *C*, *D*, *E*.

Per ottenere lo spazio degli obiettivi consideriamo la trasformazione φ:

$$\varphi: \quad \begin{aligned} z_1 &= -x_1 + 2x_2; \\ z_2 &= 2x_1 - x_2. \end{aligned}$$

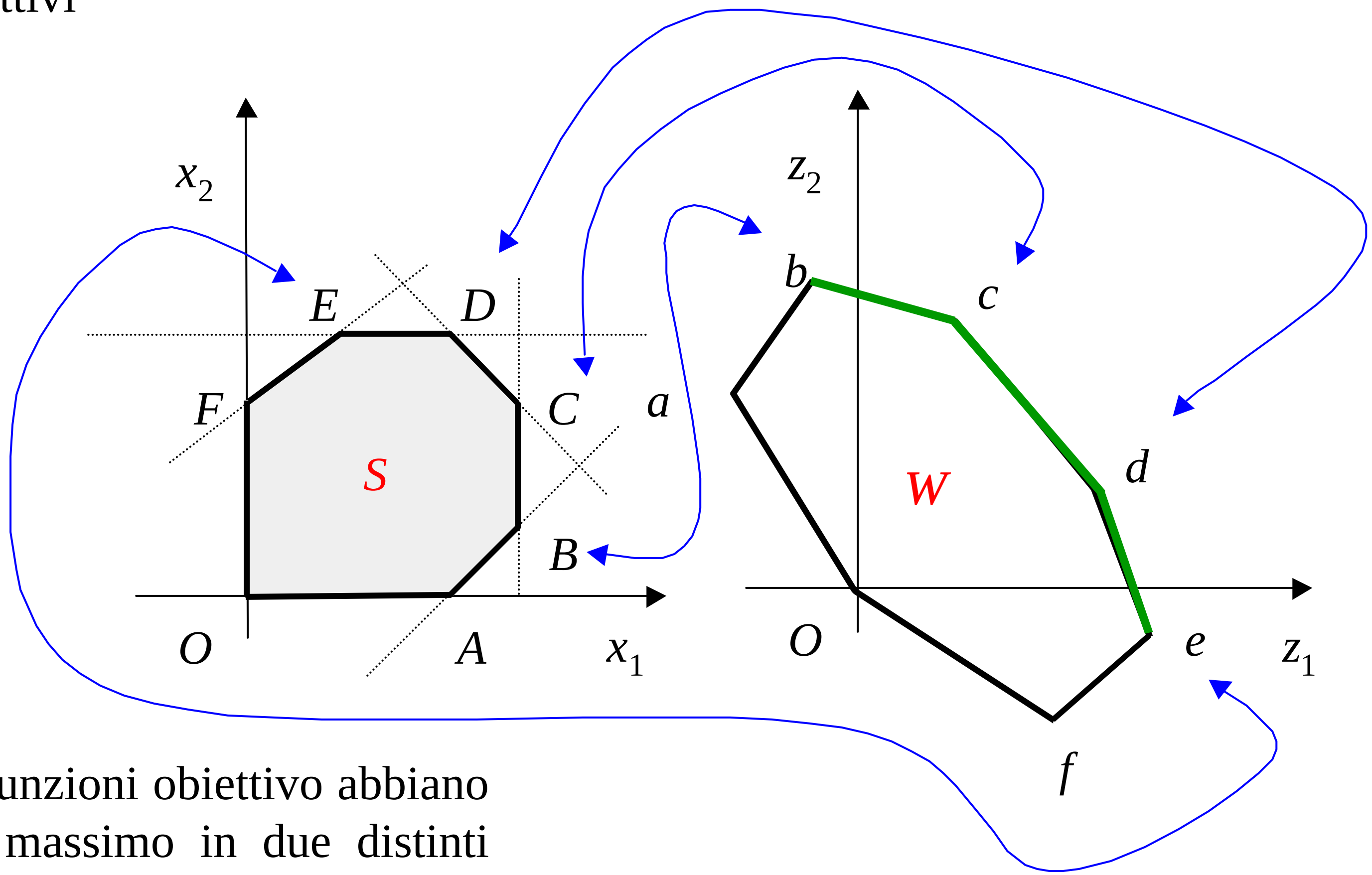
e la sua inversa φ^{-1}:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}z_1 + \frac{2}{3}z_2 \\ \frac{2}{3}z_1 + \frac{1}{3}z_2 \end{bmatrix}$$

UN ESEMPIO - II

Sostituendo a x_1 ed x_2 le corrispondenti espressioni in funzione di z_1 e z_2 si ottiene lo spazio W degli obiettivi

$$
W \begin{cases} z_1 + 2z_2 \le 12; \\ 2z_1 + z_2 \le 12; \\ z_1 + z_2 \le 7; \\ z_1 - z_2 \le 9; \\ -z_1 + z_2 \le 9; \\ z_1 + 2z_2 \ge 0; \\ 2z_1 + z_2 \ge 0. \end{cases}
$$



Notare come le due funzioni obiettivo abbiano i rispettivi punti di massimo in due distinti vertici di S e come dove sia massima una, l’altra assuma un valore relativamente basso e comunque lontano dal proprio ottimo:

$$x_1 = 1, x_2 = 4 \Rightarrow z_1 = 7, \quad z_2 = -2;$$

$$x_1 = 4, x_2 = 1 \Rightarrow z_1 = -2, \quad z_2 = 7.$$

DETERMINAZIONE EFFICIENTE DELLA FRONTIERA EFFICIENTE

$A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ insieme finito di alternative

$\mathbf{f} : A \rightarrow \mathbf{R}^p$ funzione obiettivo vettoriale ; $\mathbf{z}^i = \mathbf{f}(a_i), \forall i$

hp: $i \neq j \Rightarrow \mathbf{z}^i \neq \mathbf{z}^j$

PROBLEMA: Determinare la frontiera efficiente

Algoritmo naïf : $O(n^2 p)$

Algoritmi più efficienti (Preparata e Shamos, 1988):

- $O(n \log n)$ (ottimale) , $p = 2, 3$
- $O(n (\log n)^{p-2})$, $p \geq 4$

3) Complessità media $O(n)$ se le coordinate dei punti $\mathbf{z}^i$ sono indipendenti e hanno un'identica distribuzione continua

TEOREMA DI GEOFFRION

Sia dato l'insieme:

$$\Lambda = \left\{ \mathbf{l} : \mathbf{l} \in \mathbf{R}^{\mathbf{p}} \text{ , } \mathbf{l} > 0 \text{ , } e' \mathbf{l} = 1 \right\}$$

e si consideri il problema di programmazione lineare P($\mathbf{l}$) definito come segue:

$$\boxed{\begin{array}{l} \max \mathbf{\ddot{e}}'\mathbf{Cx} \\ \mathbf{x} \in S \\ \mathbf{\ddot{e}} \in \Lambda \end{array}}$$

E' ovvio che la soluzione ottima di P($\mathbf{l}$) dipenderà dal parametro $\mathbf{l}$. Ci proponiamo ora di dimostrare che tutte le soluzioni Pareto-ottime di un problema di programmazione lineare multiobiettivo risultano soluzioni di un problema P($\mathbf{l}$) con $\mathbf{l}$ opportuno.

Teorema (Geoffrion). $\mathbf{x} \in S$ è Pareto-ottima se e solo se esiste un vettore $\mathbf{l} \in \Lambda$ tale che $\mathbf{x}$ è soluzione ottima di P($\mathbf{l}$).

TEOREMA DI GEOFFRION

Premettiamo il seguente

> Lemma. Sia $\xi \in S$ e sia z^* il massimo della funzione obiettivo nel problema di programmazione lineare :
>
> $$\begin{aligned} &\max \mathbf{e}'\mathbf{y} \\ &\mathbf{y} = \mathbf{Cx} - \mathbf{C}\hat{\imath} \\ &\mathbf{x} \in S \\ &\mathbf{y} \geq 0 \end{aligned}$$
>
> allora **x** è Pareto-ottima se e solo se $z^* = 0$.

Dimostrazione del teorema.

i) Supponiamo **l** $\in \Lambda$ e sia **x** una soluzione ottima per P(**l**). Se **x** non è Pareto-ottima esiste un **x** $\in S$ tale che **Cx >= Cx**; premoltiplicando ambo i membri della disequazione per **l**, e ricordando che **l** > **0**, si ha:

$$\mathbf{l¢Cx} > \mathbf{l¢Cx}$$

Ciò è assurdo, perché per ipotesi **l'Cx** è il massimo e non può essere maggiorato strettamente sulla regione ammissibile.

Dimostrazione

TEOREMA DI GEOFFRION

ii) Scriviamo il duale del problema di programmazione lineare esibito nell’enunciato:

w^* = min **ìb** – **ñCî**

ì ′**A** – **ñ**′**C** ≥ 0

ñ ≥ **e**

Se **x** è Pareto-ottimo risulta, dal lemma precedente, $z^* = 0$ e quindi $w^* = 0$.

Da quest’ultima osservazione segue che, se **m º m**, **r º r** è una soluzione ottima duale:

$$\boxed{\mathbf{m'b = r'C\ x}} \qquad (1)$$

Sia ora **x** ∈ *S*; allora **Ax** = **b** ⇒ **m’Ax** = **m’b.**

Per l’ammissibilità duale risulta **m’Ax ³ r’Cx** e dunque:

$$\boxed{\mathbf{r'Cx\ £m'Ax = m'b = r'Cx}} \qquad (2)$$

poiché **r ³ e > 0**, se si pone **l** = **r / e’r** il vettore **l** così trovato è tale che:

per la (2)

(a) **l > 0**

(b) **e’ l** = 1

(c) **l ¢Cx=(r / e’r) Cx= (1 / e’r)r’C x ³ (1 / e’r)r’Cx = l ¢Cx**

Q.E.D.

ESTENSIONE AL CASO CONVESSO

Sia dato il problema di ottimizzazione multiobiettivo

$$\max \ \mathbf{f}(x)$$

$$x \in S,$$

dove $S \subseteq \mathbf{R}^n$, $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \ldots , f_p(x))$.

Sia $\overline{\Lambda} = \left\{ \mathbf{l} : \mathbf{l} \in R^p , \mathbf{l} > 0 , e' \mathbf{l} = 1 \right\}$

TEOREMA: Se la regione ammissibile S è convessa, e se le f_i sono concave, $i = 1, \ldots, p$, allora per ogni soluzione Pareto-ottima x^* esiste un $\mathbf{l} \in \overline{\Lambda}$ tale che x^* è soluzione ottima del problema $P(\mathbf{l})$:

$$\max \ \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_p f_p(x)$$

$$x \in S.$$