Esercizi d'esame di Ricerca Operativa

a cura di A. Agnetis

1

Risolvere il seguente problema di PLI con l'algoritmo dei piani di Gomory:

$$\begin{aligned} \max z = 40x_1 + 24x_2 + 15x_3 + 8x_4 & & \\ 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 & \leq & 22 \\ x_i & \geq & 0 \\ x_i & \textit{intero} & \end{aligned}$$

2

Un lanificio produce filato di tipo standard e di tipo speciale utilizzando 3 diverse macchine, le cui produzioni orarie sono le seguenti:

macchina A: 3 matasse standard e 1 speciale
macchina B: 2 matasse standard e 2 speciali
macchina C: 2 matasse standard e 1 speciale

Il mercato richiede almeno 60 matasse standard e 40 di tipo speciale al giorno. I costi orari delle due macchine sono: 90000 lire per la A, 80000 lire per B, 60000 lire per C.

1. Scrivere un modello di programmazione lineare per determinare la produzione giornaliera di costo minimo. (Non occorre imporre il vincolo che le ore giornaliere non superino 24)

2. Risolvere il problema con il metodo delle due fasi

3. Supponendo che la macchina C non possa essere usata più di 14 ore giornaliere, determinare la nuova soluzione ottima partendo dal tableau finale del punto 2 e applicando il metodo duale del simplesso.

3

Risolvere il seguente problema di PLI con l'algoritmo dei piani di Gomory:

$$
\begin{aligned}
\max z = 2x_1 + x_2 & & \\
3x_1 - 2x_2 & \leq & 0 \\
x_1 + 2x_2 & \geq & 0 \\
x_i & \geq & 0 \\
x_i & \mathit{intero} &
\end{aligned}
$$

4

Risolvere il seguente problema di PLI con l'algoritmo dei piani di Gomory:

$$
\begin{aligned}
\max z = x_1 + 2x_2 & & \\
x_1 - 2x_2 \geq & & -2 \\
x_1 + x_2 & \leq & 3 \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
x_1, x_2 & \mathit{interi} &
\end{aligned}
$$

5

Grazie a una vincita al superenalotto, avete ora il problema di investire 100 milioni di lire. Un vostro amico vi consiglia di comprare quote di fondi di investimento, della società Kezef. In particolare vi sono due tipi di fondi: Kezef Italia e Kezef Europa. Le quote possono essere acquistate solo in lotti indivisibili, da 12 milioni ciscuno per Kezef Italia, da 20 milioni ciascuno per Kezef Europa. Il vostro amico ritiene che il rendimento annuo di Kezef Italia dovrebbe essere pari a un sesto del capitale investito; quello di Kezef Europa pari al 15%. Il numero di lotti di Kezef Europa non può superare il 50% del numero complessivo di lotti acquistati. Formulare il problema come programmazione lineare a numeri interi e risolverlo con il metodo dei piani di taglio, indicando le disequazioni (tagli) generate nel corso del procedimento.

6

Risolvere il seguente problema di knapsack

$$\begin{aligned}\max z = 52x_1 + 40x_2 + 38x_3 + 9x_4 + x_5 & \\ 17x_1 + 5x_2 + 13x_3 + 3x_4 + x_5 &\leq 20 \\ x_i &\in \{0,1\}\end{aligned}$$

7

Risolvere il seguente problema di knapsack

$$\begin{aligned}\max z = 12x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 7x_4 & \\ 8x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 5x_4 &\leq 20 \\ x_i &\in \{0,1\}\end{aligned}$$

8

Un insieme di 7 lavorazioni deve essere eseguito da una macchina a controllo numerico. Ciascuna lavorazione richiede alcuni utensili, e, una volta effettuata, porta un certo profitto. La seguente tabella mostra, per ogni lavorazione, l'insieme di utensili richiesto e il corrispondente profitto:

lavorazione	Utensili	profitto
1	A, C, D, E	2000
2	A, B, F, G	1500
3	A, B, C, E	1800
4	B, D, E, G	1700
5	E, F, G	800
6	A, D, G	900
7	A, E, F	750

Il magazzino utensili della macchina può ospitare solo al più 5 utensili. Formulare come PLI il problema di determinare la configurazione del magazzino utensili con l'obiettivo di massimizzare il profitto.

9

La Svivon produce batterie elettriche di tre tipi (Alef, Beth e Ghimel). Per due di esse (Beth e Ghimel) utilizza del rame. Per coprire la produzione del prossimo mese, dispone di 4000 kg di rame. Nella seguente tabella sono indicate: la quantità di rame richiesta per produrre una scatola di ciascuna batteria, i costi di manodopera (per scatola prodotta) e prezzi di vendita al pubblico (per scatola):

	Rame (kg per scatola)	costi di manodopera	prezzo di vendita
ALEF	-	12	25
BETH	1	6	20
GHIMEL	2	4	30

Il rame ha un costo per kg pari a 5. I tre modelli di batteria devono essere prodotti in quantità tali che il numero di scatole di batterie Alef sia almeno doppio del numero di scatole di Beth e non superiore al numero di scatole di Ghimel.

1) Formulare come PL il problema di pianificare la produzione della Svivon in modo ottimo.

2) Dimostrare che la soluzione consistente nel produrre 2000 unita' di Alef e altrettante di Ghimel (e nessuna scatola di Beth) e' ottima (possibilmente utilizzando le condizioni di ortogonalità).

10

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 & \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 &= 2 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Senza determinarla esplicitamente, si vuole sapere se il valore della soluzione ottima è almeno pari a 1.

11

Si risolva il seguente problema di knapsack con il metodo di branch and bound oppure con la programmazione dinamica

$$\begin{aligned} \max z = 3x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 & \\ 6x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 10x_4 &\leq 23 \\ x_i &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

12

Il piano di produzione per il prossimo anno di un'azienda prevede una produzione di d_i unit di prodotto nel mese i, $i = 1, \ldots, 12$. Ciascun operaio è in grado di produrre k unit di prodotto in un mese. Lo stipendio mensile di ciascun operaio è pari a s. Assumere e licenziare personale ha dei costi, e precisamente: assumere un operaio costa p, mentre licenziarne uno costa q. Supponendo che inizialmente vi siano u_0 operai, determinare il numero di operai che devono essere presenti durante ciascun mese in modo da riuscire sempre a produrre la domanda richiesta e da minimizzare i costi complessivi di stipendio + assunzione + licenziamento.

13

Sia dato il seguente problema di PL:

$$
\begin{aligned}
\max z = 2x_1 + 3x_2 & \\
2x_1 + 3x_2 &\leq 30 \\
x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\
x_1 - x_2 &\leq 1 \\
x_2 - x_1 &\leq 1 \\
x_1 &\geq 0
\end{aligned}
$$

a) Scrivere il problema duale

b) Utilizzando le condizioni di ottimalità, e senza usare il metodo del simplesso, trovare la soluzione ottima del duale sapendo che quella del primale è $(27/5, 32/5)$.

14

Una fonderia utilizza quattro tipi di materiale grezzo, per ottenere un prodotto finale. Ciascun materiale ha un diverso contenuto di alluminio, silicio e carbonio. La tabella che segue riporta la composizione di ciascun materiale (espresso in percentuale sul peso totale), insieme al costo unitario.

	% alluminio	% silicio	%carbonio	costo al kg
materiale 1	3	4	6	680
materiale 2	5	4	5	750
materiale 3	1	2.5	4	450
materiale 4	4	5	7	870

Il prodotto finale deve avere un contenuto percentuale di alluminio di almeno il 3% e non superiore all'8%; un contenuto di silicio tra il 4% e il 5%; di carbonio non superiore al 5%. Formulare come PL il problema di pianificare la produzione di questa fonderia minimizzando i costi.

15

Sia dato il seguente problema di PL:

$$\min z = 7x_1 + 10x_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 &\leq 10 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 5 \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 &\geq 4 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

Trovare la soluzione ottima del duale sapendo che quella del primale è $(23/5, 1/5, 0)$. (Risposta: $(0, 31/5, 4/5)$)

16

Facendo uso dei concetti di PL studiati, determinare se il seguente insieme di disequazioni ammette o no soluzione ammissibile:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 + 5x_2 &\leq 10 \\ x_1 + 2.5x_2 - x_3 &\geq 4.5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

17

Dato il seguente problema di PL:

$$\min z = 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4$$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 1 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Scrivere il problema duale.

2. Senza usare il metodo del simplesso, verificare che (1/2,1/2) è una soluzione ottima del duale e trovare la soluzione ottima del problema primale.

18

La Làmed è una società che produce snack per aperitivi. La disponibilità di materie prime, alla fine di gennaio, è la seguente: 550 kg di arachidi, 150 kg di pistacchi, 90 kg di mandorle e 70 kg di nocciole. Ogni scatola contiene 500 grammi di prodotto. La Làmed produce quattro tipi di snack, descritti di seguito:

prodotto	composizione	profitto (lire/scatola)
Mem	solo arachidi	260
Num	non più del 50% di arachidi almeno il 10% di mandorle almeno il 15% di pistacchi	400
Pe	solo pistacchi	510
Qof	almeno il 30% di pistacchi almeno il 20% di mandorle almeno il 30% di nocciole	520

Supponendo che tutto quanto prodotto viene venduto, formulare come PL il problema di massimizzare il profitto della Làmed.

19

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare.

$$
\begin{aligned}
\min z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 & \\
2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 + 3x_2 + x_4 &= 2 \\
x_j &\geq 0
\end{aligned}
$$

Possibilmente senza usare il metodo del simplesso, verificare che la base ottima è $[A_1 A_2]$. Qual è la soluzione ottima x^*?

20

Un allevatore vuole dare al proprio bestiame una certa quantità giornaliera b (in grammi) di vitamine. Per fare questo, esamina n diversi mangimi, e per ciascuno di essi rileva i grammi a_i di vitamine presenti in un etto di mangime, e il costo c_i di un etto di mangime. Il problema è quello di fornire la quantità di vitamine b richiesta, minimizzando i costi. Detto k lindice per cui si ha il minimo dei rapporti c_i/a_i, ovvero

$$\frac{c_k}{a_k} = \min_i \{\frac{c_i}{a_i}\}$$

utilizzando gli strumenti della teoria della dualità, dimostrare che la decisione più conveniente consiste nellacquistare b/a_k etti del solo mangime k.

21

In una rete di calcolatori, vi sono n terminali ciascuno dei quali deve essere collegato ad un concentratore. Ci sono m concentratori, a ognuno dei quali possono essere collegati al più k terminali. Perché un concentratore possa essere collegato a un terminale, quest'ultimo deve essere "attivo". Il costo di attivazione di un concentratore j è f_j, mentre il costo di collegamento del terminale i con il concentratore j è c_{ij}. Formulare come PLI il problema di minimizzare i costi complessivi, nel rispetto dei vincoli.

22

Dato il seguente problema di PL:

$$\begin{aligned} \min z = 4x_1 + x_2 + x_3 & \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 &= -5 \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

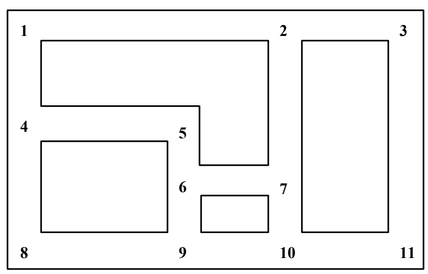
fornire una soluzione di base ammissibile, o dimostrare che non esiste.

23

Studiando il comportamento resistivo di un nuovo materiale superconduttore, uno scienziato sottopone un campione del materiale a un valore di tensione x, e misura la corrente y da cui viene attraversato. In cinque esperimenti, egli ha ottenuto i seguenti valori.

tensione (V)	corrente (A)
1	0.23
2	0.45
3	0.79
4	1.25
5	1.85

Secondo la sua teoria, la dipendenza tra tensione e corrente può essere espressa nella forma $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Il problema è quello di determinare i parametri tali da minimizzare la somma degli scarti in valore assoluto dei punti che rappresentano i risultati degli esperimenti rispetto ai corrispondenti punti sulla curva $f(x)$. Formulare il problema come PL.



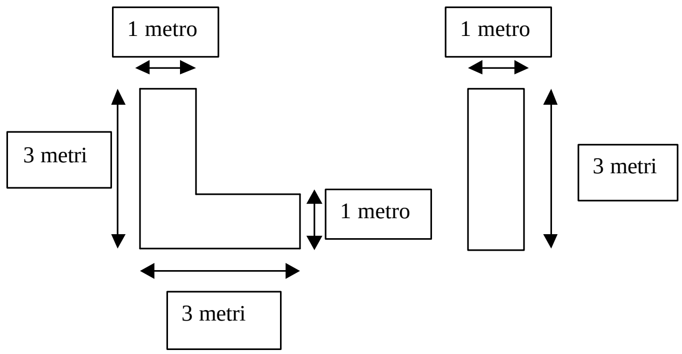
24

In figura è rappresentata la piantina di un museo, formato da 4 stanze e una rete di corridoi. Agli incroci dei vari corridoi (punti $1, \ldots, 11$), è possibile installare delle telecamere che riescono a controllare ambedue le direzioni ortogonali. Ad esempio, se si installa una telecamera nel punto 5, questa è in grado di sorvegliare i corridoi 4–5, 5–6 e 6–9. Supponendo che il costo di installazione di una telecamera nel punto i è pari a w_i, $i = 1, \ldots, 11$, formulare come problema di programmazione lineare a numeri interi il problema di sorvegliare tutti i corridoi del museo al costo minimo.

25

Un'industria di mobili deve ricavare da lastre rettangolari di 3 x 4 metri gli elementi indicati in figura. Precisamente, deve soddisfare una domanda di 20 elementi del tipo

”L” e 30 del tipo ”I” utilizzando il numero minimo di lastre. Formulare il problema come problema di programmazione lineare.



26

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

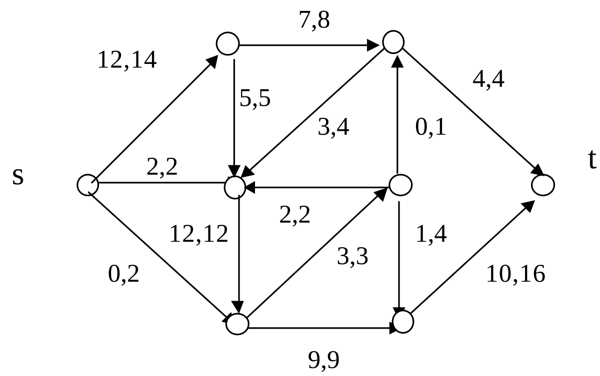
$$\min z = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_3 + 4x_4 &= 5 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

1. Trovare la soluzione ottima del problema, sapendo che la soluzione ottima del problema duale è (-3/8,11/8,1/4).
2. Determinare in quale range può variare il termine noto della seconda riga (attualmente al valore 4) senza che vari la base ottima.

27

L’azienda Pilpel vuole produrre una lega metallica composta, in peso, per il 30% di vanadio e per il rimanente 70% di titanio. Per produrla, può utilizzare alcune leghe già presenti in commercio, nelle seguenti percentuali e ai seguenti prezzi per kg:



lega	%vanadio	%titanio	costo per kg (lire)
lega 1	10	90	14000
lega 2	25	75	11000
lega 3	50	50	8000
lega 4	75	25	5000
lega 5	95	5	4000

1. Formulare come PL il problema di produrre la nuova lega al costo minimo.
2. Verificare che la decisione più conveniente è quella di utilizzare le leghe 2 e 4, e non utilizzare le altre.

28

Determinare il valore del flusso massimo da s a t a partire dalla distribuzione di flussi indicata in figura, applicando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. (Accanto a ciascun arco è indicato il flusso corrente e la capacità dell'arco.) Indicare inoltre una sezione di capacità minima.

29

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\min z = 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_3 + 4x_4 &\leq 5 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Dimostrare che la soluzione ottima del problema è (2/3,0,2,3/4).

30

La Ni'iar è un'industria cartaria che produce su ordinazione bobine di carta, di varie larghezze e colori. Queste sono ottenuti tagliando bobine standard, di larghezza 70 cm, che possono essere bianche o rosa. In questo mese la Ni'iar ha ricevuto un ordine di produzione con le seguenti specifiche:

larghezza (cm)	Quantità	Colore
12	2000	bianco
12	1500	rosa
15	1500	bianco
15	500	rosa
15	2000	indifferentemente bianco o rosa

Sapendo che il costo delle bobine rosa è 1.1 volte quello delle bobine bianche, formulare come problema di programmazione lineare il problema di minimizzazione del costo delle bobine da utilizzare per soddisfare l'ordine.

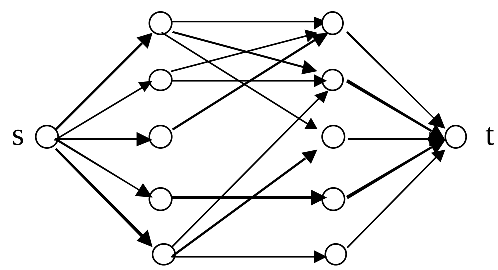
31

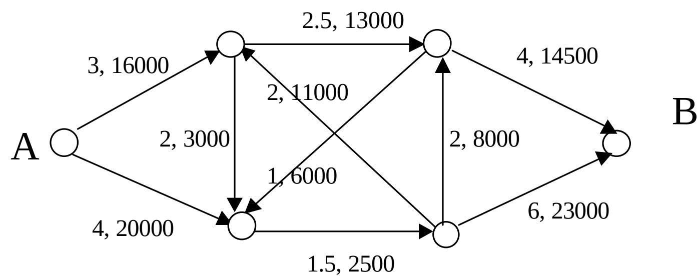
Ci sono n lavori *indivisibili* da effettuare, ognuno caratterizzato da una sua durata p_i, $i = 1, \ldots, n$. Avendo due persone a disposizione, volete ripartire i lavori tra queste due persone facendo in modo che i loro carichi di lavoro siano il più possibile bilanciati.

1. Formulare il problema in termini di problema di knapsack.
2. Applicare un opportuno algoritmo per risolvere il problema nel caso $n = 4$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 6$, $p_4 = 7$.

32

Nel grafo in figura, tutti gli archi hanno capacità pari a 1. Quelli indicati in grassetto sono attraversati da un flusso pari a 1, gli altri sono vuoti. Applicare l'algoritmo di Ford e Fulkerson per trovare il valore del massimo flusso da s a t e indicare una sezione di capacità minima.





33

In figura è rappresentata una rete stradale che unisce varie località. A ogni tratto di strada sono associati due numeri. Il primo rappresenta il tempo necessario a percorrerlo, il secondo il pedaggio che è necessario pagare. Si vuole andare da A a B nel minor tempo possibile, ma si hanno a disposizione solo 44500 lire per pagare i pedaggi. Formulare in termini di programmazione lineare a numeri interi il problema di trovare il percorso più conveniente.

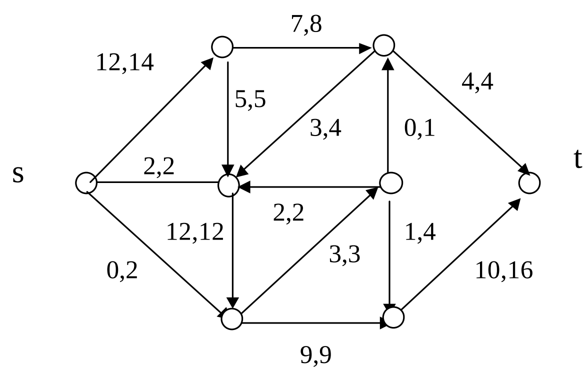
34

La Kilim vende elettrodomestici, e deve inviare frigoriferi in quattro località diverse. Nella località j devono essere spediti d_j frigoriferi, $j = 1, \ldots, 4$. Per soddisfare questa domanda, la Kilim può attingere da tre depositi dislocati sul territorio nazionale, A, B e C. Nei tre depositi sono presenti s_A, s_B e s_C frigoriferi rispettivamente. Spedire un frigorifero dal deposito i alla località j ha un costo pari a c_{ij}. Non è tecnicamente possibile spedire frigoriferi dal deposito B alla località 3. La tabella riporta i dati del problema.

	1	2	3	4	s_i
A	21	25	31	34	100
B	23	19	$+\infty$	32	60
C	36	27	25	19	50
d_j	40	50	50	70	

1. Formulare come programmazione lineare a numeri interi il problema di decidere come spedire i frigoriferi in modo da minimizzare i costi.

2. Cosa si può dire relativamente alla possibilità di risolvere il problema facendo uso della programmazione lineare?



35

Determinare il valore del flusso massimo da s a t a partire dalla distribuzione di flussi indicata, applicando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. (Accanto a ciascun arco è indicato il flusso corrente e la capacità dell'arco.) Indicare inoltre una sezione di capacità minima.

36

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

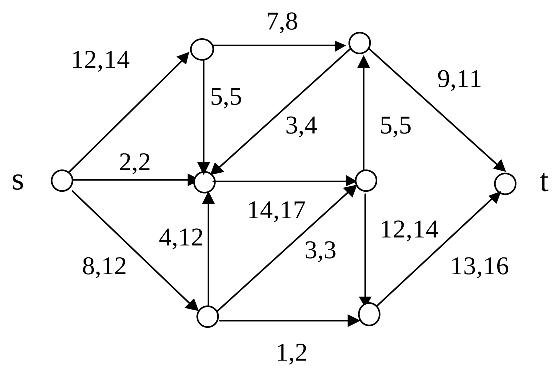
$$\min z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 2 \\ x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_3 + 4x_4 &\leq 5 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Trovare la soluzione ottima del problema duale sapendo che la soluzione ottima del primale è (2/3,0,2,3/4).

37

Determinare il valore del flusso massimo da s a t a partire dalla distribuzione di flussi indicata, applicando l'algoritmo di Ford e Fulkerson. (Accanto a ciascun arco è indicato il flusso corrente e la capacità dell'arco.) Indicare inoltre una sezione di capacità minima.



38

Avete deciso di organizzare una cena a casa vostra. Poiché però siete troppo impegnati a studiare per l'esame di Ricerca Operativa, avete pensato bene di far cucinare i vostri amici, che d'altra parte sono ben lieti di aiutarvi. Dopo aver lungamente meditato sulle capacità culinarie dei vostri amici, siete giunti a stilare la seguente tabella, dove la cifra indica il vostro giudizio sulla corrispondente pietanza preparata dal vostro amico/a.

amico/a	Antipasti	Primi	Secondi	Contorni	Dolci
Andrea	7	6	5	7	8
Barbara	6	8	7	6	5
Ciccio	6	5	4	4	8
Doriana	7	8	6	6	6
Everardo	5	6	7	5	0
Florinda	7	8	8	8	6
Gimmi	7	7	5	5	6

Il problema è quello di decidere *se* e cosa far preparare a ognuno, considerando che la vostra cena consisterà di una pietanza di ciascun tipo (ossia un antipasto, un primo, un secondo etc.) e che per discrezione non intendete chiedere a nessuno di preparare più di una pietanza.

1) Formulare in termini di programmazione lineare a numeri interi il problema di massimizzare la qualità della vostra cena

2) Cosa si può dire sulla possibilità di risolvere il problema facendo uso della programmazione lineare?

39

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\
& \begin{array}{rcl}
2x_1 + x_2 & >= & 1 \\
2x_2 + x_3 & >= & 1 \\
2x_3 + x_4 & >= & 1 \\
2x_4 + x_5 & >= & 1 \\
x_i & \geq & 0
\end{array}
\end{aligned}
$$

Trovare la soluzione ottima del problema sapendo che la soluzione ottima del duale è (1,0,1/2,1/4).

40

Una macchina per xerigrafie deve stampare alcuni lotti di fogli. Ciascun lotto consiste di varie centinaia di fogli. Una volta iniziato un lotto, la macchina non può essere interrotta fino a che il lotto non è esaurito e viene montato il nuovo disegno. I dati relativi ai lotti che devono essere prodotti sono indicati in tabella. Accanto alla durata della lavorazione, viene indicata l'ora alla quale, idealmente, la lavorazione dovrebbe essere completata.

lotto	Tempo richiesto (ore)	ora ideale di fine
1	1h30'	10:00
2	2h00'	13:30
3	1h30'	19:00
4	1h00'	19:30

Per ogni ora di ritardo di ciascun lotto rispetto a tale istante, si pagano 100 euro di penale. D'altra parte, per ogni ora di anticipo rispetto a tale istante, si pagano 10 euro (per tenere conto del costo di immagazzinamento del prodotto finito). I lotti vanno processati nell'ordine 1, 2, 3, 4. Al termine di un lotto, la macchina richiede 3 ore di lavoro per essere riconfigurata per il lotto successivo. Considerando che la macchina inizia a lavorare alle ore 6:00, formulare come PL il problema di determinare l'istante di inizio di ciascun lotto in modo da minimizzare i costi complessivi.

41

Si consideri il seguente problema:

$$\begin{aligned} \max z = 3x_1 + x_2 & & \\ x_1 + 4x_2 & \leq & 12 \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 5 \\ x_j & \text{intero} & \end{aligned}$$

e lo si risolva per mezzo della tecnica del branch and bound.

42

Dato il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min z = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 & \\ 3x_1 + x_2 - x_5 = 2 & \\ x_2 + 4x_3 = 4 & \\ x_3 + 4x_4 + x_6 = 5 & \\ x_i & \geq 0 \end{aligned}$$

si considerino i seguenti insiemi di colonne:

1. (A_2, A_4, A_5)
2. (A_1, A_3, A_4)
3. (A_1, A_3, A_5)
4. (A_3, A_4, A_5)

Per ciascuno di essi, indicare se individua o meno una base, e in tal caso se si tratta di una base ammissibile e/o ottima.

43

In un impianto manifatturiero, cinque macchine utensili $(M_1, \ldots, M_5)$ sono utilizzate per produrre pezzi meccanici. Vi sono da produrre sei lotti di pezzi (1,. . .,6). Ciascun lotto i può essere prodotto da un sottoinsieme di macchine $M(i)$. La tabella mostra il tempo richiesto da ciascun lotto, e le macchine su cui il lotto può essere lavorato. Il problema è quello di assegnare i carichi di lavoro (in termini di tempo) alle varie macchine minimizzando la differenza tra i carichi di lavoro della macchina più carica e di quella meno carica. Formulare il problema come programmazione lineare.

i	$M(i)$	tempo (minuti)
1	M_1, M_2	150
2	M_1, M_3, M_4	130
3	M_2, M_5	200
4	M_2, M_3, M_4	180
5	M_1, M_4, M_5	170
6	M_2, M_5	220

44

Dato un grafo $G = (N, A)$, non orientato, si consideri il seguente problema. I nodi del gafo rappresentano città che devono essere difese da pattuglie. Le pattuglie possono essere dislocate in corrispondenza dei nodi del grafo, e possono essere di due tipi, *fisse* e *mobili*. Una pattuglia fissa dislocata nella città i difende solo la città i. Una pattuglia mobile dislocata nella città i difende, oltre a i, anche tutte le città adiacenti, ossia difende $\{i\} \cup \delta(i)$. Dislocare una pattuglia fissa ha un costo pari a 2, una mobile ha costo 3. Il problema è quello di difendere tutti i nodi del grafo al costo minimo. Formulare il problema come programmazione lineare a numeri interi.

45

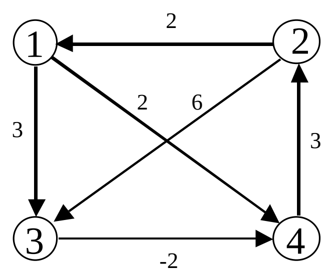
La compagnia di autonoleggio Mehonit consente ai clienti di lasciare la macchina in un luogo diverso da dove si è noleggiata. Come effetto di questo fatto, alla fine del mese vi è una discrepanza tra il numero di automobili presenti in un posto e quelle effettivamente presenti. Per riequilibrare la situazione è necessario dunque spostare un certo numero di macchine. Il costo per spostare una macchina dalla città i alla città j è proporzionale alla distanza tra queste due città (indicato in centinaia di km). In tabella sono riportate il numero programmato di macchine in ciascuna città, il numero attualmente presente e la matrice delle distanze tra tutte le città in cui la Mehonit ha un ufficio.

città	numero macchine desiderato	numero macchine attuale	A	B	C	D	E
A	200	150	-	7	4	6	2
B	100	180	7	-	3	2	8
C	300	280	4	3	-	3	6
D	250	220	6	2	3	-	6
E	150	170	2	8	6	6	-

Il problema è quello di fare in modo da avere nuovamente in ogni città il numero programmato di macchine.

1) Formulare in termini di programmazione lineare a numeri interi il problema di minimizzare i costi di spostamento delle macchine.

2) Cosa si può dire sulla possibilità di risolvere il problema facendo uso della programmazione lineare?



46

Applicare l'algoritmo di Floyd-Warshall al grafo in figura.

47

Siete i curatori dell'opera omnia del celebre gruppo Hashirim, i quali hanno pubblicato, durante la loro carriera, complessivamente n brani, di varie durate (indicate con p_i la durata del brano i). Vi è stato chiesto di far uscire una collana di m compact disc, comprendente tutti i brani, con l'unico requisito che la differenza tra la durata complessiva del cd più lungo e di quello più corto sia minima.

Dovete decidere di quali brani deve essere composto ogni cd. Formulare il problema come programmazione lineare a numeri interi.

48

Un agricoltore possiede 100 ettari di terreno che intende usare per coltivare grano, mais, canna da zucchero, erba da pascolo. Dei 100 ettari disponibili, 10 sono adatti per qualunque coltivazione, 50 sono adatti per qualunque coltivazione tranne che la canna da zucchero mentre i rimanenti 40 ettari possono essere adibiti solo a erba da pascolo.

Inoltre, l'agricoltore può allevare delle mucche che richiedono, ciascuna, mezzo ettaro di terreno adibito a pascolo e che vengono vendute dopo un anno. L'agricoltore e i suoi familiari non intendono lavorare, nell'arco del prossimo anno, più di 2000 ore complessive.

	Grano	Mais	Canna	Erba
costo per ettaro (semi, fertiliz.)(mila lire)	6	3	8	5
prezzo vendita prodotto per ettaro (mila lire)	45	35	100	–
ore di lavoro per ettaro (in un anno)	12	14	20	5

Inoltre, allevare una mucca per poi rivenderla dà un profitto netto di 200 mila lire, e ogni mucca richiede in un anno 100 ore di lavoro. Formulare come programmazione lineare il problema di massimizzare il profitto dell'agricoltore.

49

Risolvere il seguente problema di knapsack con il metodo del branch and bound o con la programmazione dinamica:

$$\begin{aligned} \max z = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 6x_4 & \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 &\leq 9 \\ x_j &\in \{0,1\} \end{aligned}$$

50

Una macchina deve eseguire 6 lavori, ciascuno dei quali è caratterizzato da una durata p_i, una data di consegna d_i e un peso w_i, che può pensarsi come una misura dell'importanza di ciascun lavoro. Tra i lavori esistono relazioni di precedenza. Determinare, applicando un opportuno algoritmo, la sequenza di lavorazione sulla macchina in modo tale da minimizzare il *massimo* valore che assume la quantità w_iT_i, ove T_i indica la *tardiness* del lavoro i-esimo.

i	d_i	w_i	p_i	precede...
1	8	2	4	5
2	12	1	3	5
3	8	2	2	6
4	8	1	4	6
5	12	4	1	–
6	13	3	1	–

51

Si consideri il seguente problema di programmazione lineare

$$\begin{aligned} \min z = x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 & \\ x_2 - 2x_3 = 1 & \\ x_3 + 4x_4 = 5 & \\ x_i \geq 0 & \end{aligned}$$

1. Dimostrare che, nella soluzione ottima, $x_3 = 0$.
2. Calcolare la soluzione ottima del problema duale.
3. Trovare entro quali limiti può variare il termine noto della seconda equazione (attualmente pari a 1) affinché la base ottima rimanga tale.

52

Un'azienda produce scarpe. Nella tabella sono indicate le risorse richieste dalla produzione di ciascun paio di scarpe, e il prezzo di vendita. Il problema consiste nel determinare la produzione di ciascun tipo di scarpa, considerando le risorse disponibili, e tenendo presente che per ciascun tipo di scarpa è stabilita una soglia minima, sotto la quale non vi è convenienza a produrre (ad esempio, la produzione di scarponi sarà pari a 0 oppure dev'essere almeno pari a 100 paia, e cosi' per gli altri tipi). Formulare il problema di massimizzare il profitto in termini di programmazione lineare intera.

tipo	cuoio (g)	ore-macchina	chiodi	gomma (g)	soglia	prezzo (lire/paio)
scarponi da montagna	850	3	20	250	100	150000
mocassini	600	2	15	150	200	120000
scarpe da passeggio	700	2.5	20	150	150	130000
disponibilità	120000	7000	40000			

53

Un'officina meccanica produce pezzi di ricambio per trattori. I vari ricambi possono essere raggruppati in 5 tipi, ognuno dei quali richiede un certo tempo di lavorazione su vari macchinari. Il tempo (in ore) richiesto da ciascun pezzo su ciascuna macchina, il profitto (in migliaia di lire) derivante dalla produzione di ciascun pezzo e il tempo-macchina disponibile nel prossimo mese sono indicati in tabella.

	1	2	3	4	5	ore disponibili
fresatura	2	1.5	1	1	2	200
taglio	1	2	2.5	2	1	80
ispezione	2	1	2	1.5	1.5	100
profitto un.	100	60	90	80	60	

Un vostro collega sostiene che la cosa più conveniente è produrre solo pezzi dei primi due tipi, e di non usare tutte le 200 ore di fresatura disponibili (mentre le ore di taglio e ispezione vanno usate completamente). Sapreste dire se ha ragione o meno?

54

Una macchina deve effettuare un certo numero di lavorazioni non interrompibili $\{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$. La lavorazione J_i richiede un tempo di processamento p_i. Per ogni lavorazione è specificata una due date d_i. Formulare in termini di programmazione lineare a numeri interi il problema di determinare l'ordine in cui eseguire le lavorazioni in modo tale da minimizzare la somma delle tardiness.