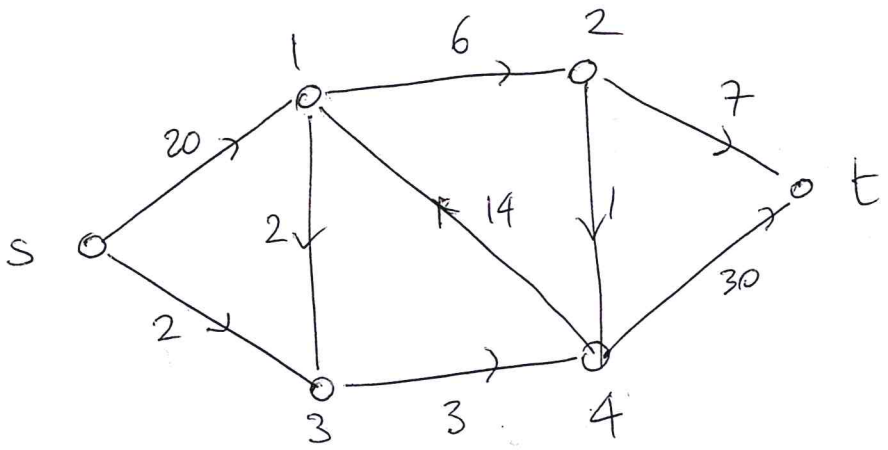
Formulazione del problema del cammino minimo.



$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in P \\ 0 & (i,j) \notin P \end{cases}$$

$$\min \; 20x_{s1} + 2x_{s3} + 2x_{13} + 3x_{34} + 14x_{41} + 6x_{12} + x_{24} + 7x_{2t} + 30x_{4t}$$

$$x_{s1} + x_{s3} = 1$$

$$-x_{2t} + x_{4t} = -1$$

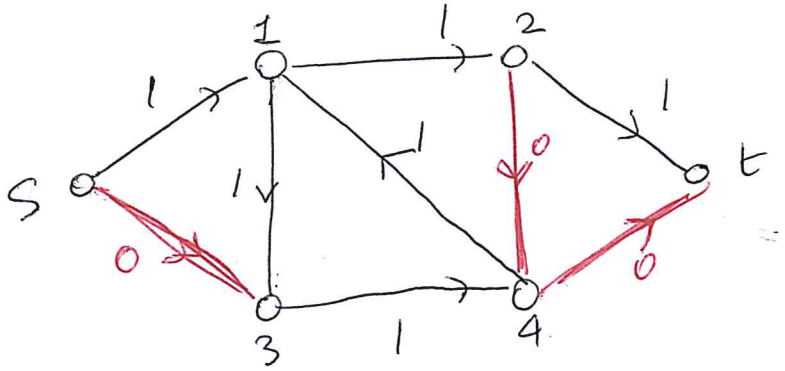
$$-x_{s1} + x_{41} + x_{12} + x_{13} = 0$$

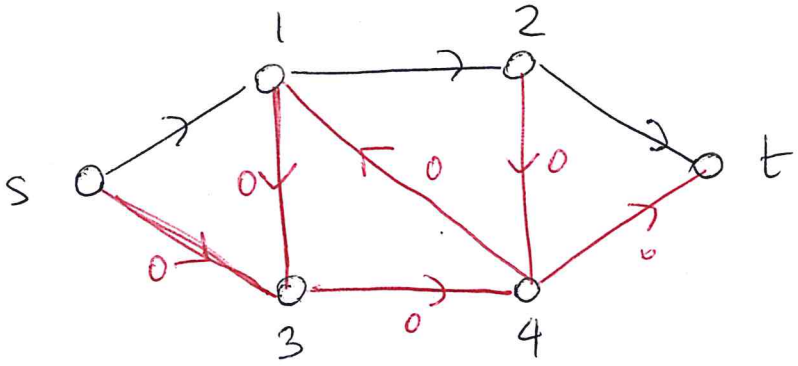
$$-x_{12} + x_{24} + x_{2t} = 0$$

$$-x_{s3} - x_{13} + x_{34} = 0$$

$$+x_{41} - x_{24} + x_{4t} - x_{34} = 0$$

Programmazione Lineare Intera (PLI)





1. La formulazione di PLI è corretta finché non ci sono cicli negativi

Matrici totalmente unimodulari (TUM).

"Una matrice a elementi $\{0, 1, -1\}$ è TUM se il determinante di tutte le sue sottomatrici quadrate è pari a $0, 1$ o -1."

(inclusa la matrice stessa!)

Poliedro in forma standard

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

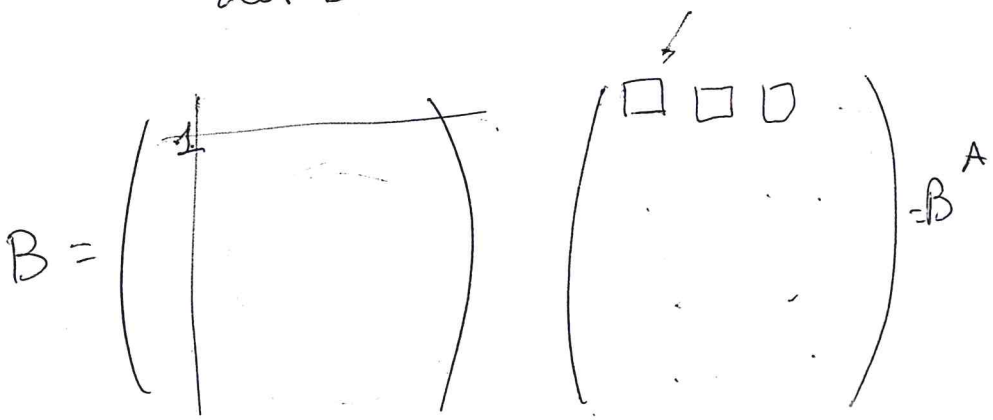
A è TUM

b vettore di interi

Una SBA è definita da una base $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, ed è:

$$\begin{cases} x_B = B^{-1} b \longrightarrow \text{intero} \\ x_F = 0 \end{cases}$$

$$B^{-1} = \frac{(B^A)^T}{\det B}$$



$$\begin{cases} \min\ c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases}$$

Se A è totalmente unimodulare, b intero

$$\begin{cases} \min\ c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ \cancel{x \in \mathbb{Z}^n} \end{cases}$$

è possibile risolvere il problema di PLI rilassando i vincoli di interezza e risolvendo il problema come un normale problema di PL.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I_1 I_2

Criterio sufficiente di totale unimodularità.

A $m \times n$, a elementi $\in \{0, 1, -1\}$.

(1) ogni colonna di A ha al più due el $\neq 0$

(2) esiste una partizione (I_1, I_2) delle righe di A in modo tale che, per ogni colonna di A:

- se gli el $\neq 0$ sono uguali, le righe cui appartengono sono in insiemi diversi della partizione
- se gli el $\neq 0$ sono opposti, le righe cui appartengono sono nello stesso insieme della partizione.

$$\begin{array}{c} I_1 \\ \\ I_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

$$I_1 \leftarrow \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \rightarrow I_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Non soddisfa il criterio.

Dim. — Presa una qualunque sottomatrice quadrata di ordine k, vogliamo dimostrare che ha $\det \in \{0, 1, -1\}$.

IPOTESI INDUTTIVA

Per $k=1$, la tesi vale.

Se la tesi vale per ogni sottomatrice di ordine $k-1$, allora vogliamo dimostrare che vale anche per sottomatrici di ordine k.

$$Q_k = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

1) In Q_k se c'è una colonna tutta di 0.

$\Rightarrow \det Q_k = 0$

2) In Q_K $\exists$ una colonna con un solo el $\neq 0$

$$Q_K = \left(\begin{array}{c|c} \pm 1 & \\ \hline & \tilde{Q}_{K-1} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow \det Q_K \in \{0, 1, -1\}$

$$Q_K = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & +1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$\Downarrow$

ottengo il vettore nullo come comb. lineare delle righe di $Q_K \Rightarrow \det Q_K = 0$

e la tesi è dimostrata ∎